
Laboratoire Jacques-Louis LIONS - UMR 7598
Université Pierre et Marie Curie - Paris VI
École Doctorale de Sciences Mathématiques de Paris Centre

THÈSE DE DOCTORAT

SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

présentée par

FILIPA MANUELA VENTURA CAETANO

pour l'obtention du titre de

Docteur de l'Université Pierre et Marie Curie - Paris VI

Sujet de la thèse :

**SUR CERTAINS PROBLÈMES
DE LINÉARISATION ET DE COUPLAGE
POUR LES SYSTÈMES HYPERBOLIQUES NON-LINÉAIRES**

Soutenue le ... devant le jury composé de :

Président

Directeur de thèse

Rapporteurs

Examineurs

M. Pierre-Arnaud RAVIART

Résumé

Ce mémoire se compose de trois parties différentes. La première porte sur l'étude de la linéarisation d'un problème aux limites pour une loi de conservation scalaire. Nous y prouvons l'existence de solution mesurée pour le problème obtenu par linéarisation autour d'une solution discontinue de l'équation scalaire. Dans les deuxième et troisième parties, nous nous intéressons à certains modèles de relaxation pour les systèmes hyperboliques de lois de conservation et à des problèmes de couplage du type « modèle à l'équilibre - modèle hors équilibre ». La seconde partie est ainsi consacrée à l'étude d'un modèle de relaxation semi-linéaire pour une loi de conservation scalaire et au problème du couplage entre le modèle de relaxation et le modèle à l'équilibre. Nous prouvons par une nouvelle méthode la convergence d'un schéma de relaxation vers la solution entropique de la loi de conservation scalaire et un résultat analogue pour le schéma couplé lorsque le flux est une fonction croissante. Enfin, nous nous intéresserons dans la troisième partie au couplage entre le système d'Euler de la dynamique des gaz et un système de relaxation qui lui est associé. Nous établissons les conditions de couplage et étudions le problème de Riemann couplé dans la classe des fonctions continues à l'interface.

Abstract

This PhD thesis is divided into three different parts. The first one deals with the linearization of a boundary value problem for a scalar conservation law. We prove existence of a measured-valued solution of the linearized problem, when we linearize at a discontinuous basic solution. The second and third parts concern relaxation approximation for hyperbolic systems of conservation laws and « equilibrium model - non equilibrium model » coupling problems. In the second part we are interested in a semi-linear relaxation approximation for a scalar conservation law and in the coupling of the relaxation model with the equilibrium model. We prove by using a different method firstly the convergence of a relaxation scheme towards the unique entropy solution of the scalar conservation law and then a similar result for the coupled scheme, when we assume that the flux is a strictly increasing function. Finally, the third part treats the coupling of Euler's equations of gas dynamics with an associated relaxation system. We establish the coupling conditions and solve the Riemann problem in the class of functions which are continuous at the coupling interface.

Sommaire

Introduction générale	11
I Linéarisation d'un problème aux limites pour une loi de conservation scalaire	19
Introduction	21
1 Étude théorique du problème linéarisé	25
1.1 Le problème aux limites pour une loi de conservation scalaire	25
1.2 Le problème mixte linéarisé	29
1.2.1 La solution du problème linéarisé dans le cas où la solution de base est discontinue sur une courbe de choc	30
1.2.2 Le développement formel de u_ε autour de u dans le cas de l'équation de Burgers	38
1.2.3 La linéarisation de la condition d'entropie (1.6) et la condition aux limites pour le problème linéarisé dans le cas f convexe	40
2 L'approximation numérique	43
2.1 Discrétisation par un schéma de Roe linéarisé	43
2.2 Résultats obtenus dans le cas de l'équation de Burgers	45
II Lois de conservation scalaires : approximation par relaxation et couplage	51
Introduction	53
3 Relaxation semi-linéaire de lois de Conservation	57
3.1 Le modèle de relaxation de Jin et Xin	57
3.1.1 Existence et unicité de solution pour le système (3.1)	58
3.1.2 Entropies pour le système de relaxation	66
3.2 Convergence d'un schéma de relaxation	69
3.2.1 Le schéma de relaxation	70

3.2.2	Stabilité L^∞	72
3.2.3	Estimations de la Variation Totale	74
3.2.4	Convergence du schéma numérique, lorsque $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$, vers une solution du système de relaxation	79
3.2.5	Convergence lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$	82
4	Le cadre général du couplage	89
4.1	Le cas des systèmes de même taille	90
4.1.1	Le couplage par flux	90
4.1.2	Le couplage par état	91
4.1.3	Le couplage par état modifié	93
4.2	Extension au cas des systèmes de tailles différentes	94
5	Couplage d'une loi de conservation scalaire et du système de relaxation associé	97
5.1	Le problème couplé	97
5.1.1	Le problème aux limites pour le système de relaxation	99
5.1.2	Solution du problème couplé dans les cas $f' > 0$ et $f' < 0$	104
5.2	Un schéma numérique pour le problème couplé	107
5.3	Convergence du schéma numérique dans le cas $f' > 0$	109
5.3.1	Estimations de la norme L^∞ et de la Variation Totale	109
5.3.2	Convergence du schéma numérique couplé lorsque $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$	116
5.3.3	Convergence à la frontière	117
5.4	Résultats numériques	123
III Le couplage entre le système de la dynamique des gaz et le système HRM		129
Introduction		131
6	Le système de la dynamique des gaz et le système HRM	135
6.1	Les équations d'Euler de la dynamique des gaz	135
6.2	Le système HRM	138
6.2.1	Hypothèses générales sur le modèle	138
6.2.2	La dynamique du changement de phase décrite par le système HEM	139
6.2.3	Approximation par relaxation - le modèle HRM	140
7	Le couplage entre le système de la dynamique des gaz et le système HRM	145
7.1	Présentation du problème du couplage	145
7.2	Courbes d'onde et problème de Riemann	148
7.2.1	Rappel sur les courbes d'onde pour le système d'Euler	148
7.2.2	Courbes d'onde pour le système HRM homogène	155
7.2.3	Projection des courbes d'onde dans le plan (u, p)	160
7.2.4	Le problème de Riemann	162

7.3	Analyse de la vitesse des ondes	163
7.3.1	Vitesse des ondes pour le système d'Euler	164
7.3.2	Vitesse des ondes pour le système HRM homogène	176
7.4	Les conditions de couplage	179
7.4.1	L'ensemble $\mathcal{O}_R(V_g)$	180
7.4.2	L'ensemble $\mathcal{O}_L(V_d)$	188
7.4.3	Les contraintes de couplage	191
7.5	Le problème de Riemann couplé dans la classe des fonctions continues à l'interface	193
7.5.1	Les ensembles $\mathcal{V}_L(V_g)$ et $\mathcal{V}_R(V_d)$	195
7.5.2	Le problème de Riemann couplé dans la classe des fonctions continues et à l'équilibre à l'interface	197
7.5.3	Commentaires sur la condition d'équilibre	201
A	Démonstration des lemmes 7.6 et 7.7	205
A.1	Démonstration du lemme 7.6	205
A.2	Démonstration du lemme 7.7	211
	Bibliographie	217

Introduction générale

Introduction générale

Les systèmes hyperboliques non-linéaires décrivent de nombreux phénomènes physiques, notamment dans le domaine de la mécanique des milieux continus. Un cas particulier est celui des systèmes de lois de conservation

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial x_j} F_j(U) = 0, \quad (1)$$

où $U : \mathbb{R}^d \times [0, +\infty[\rightarrow \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ est un champ vectoriel de composantes (U_1, \dots, U_n) , chaque U_i représentant la densité d'une quantité conservée au cours du temps dans un certain domaine de l'espace \mathbb{R}^d , et les fonctions $F_j : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ les fonctions de flux. En intégrant chacune de ces équations sur le domaine en question, on s'aperçoit que la variation de la masse totale des quantités U_i n'est due qu'aux variations du flux le long du bord, typiquement à la différence entre le flux « sortant » et le flux « rentrant » dans ce domaine. La plupart des lois de conservation décrivant des systèmes physiques sont des systèmes à $d = 3$ dimensions d'espace, mais souvent, par un argument de symétrie spatiale, on peut se restreindre au cas unidimensionnel. Dans cette version simplifiée, le système (1) s'écrit

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F(U) = 0. \quad (2)$$

Le système (2) est dit hyperbolique si, en chaque point U appartenant à Ω , la matrice jacobienne de f au point U , que l'on note $Df(U)$, possède N valeurs propres réelles et une base de vecteurs propres. De nombreux problèmes, tels que la dynamique des gaz, l'élastodynamique, la propagation d'ondes acoustiques, etc., conduisent à des systèmes de ce type. La version scalaire ($n=1$)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0, \quad (3)$$

avec $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, décrit par exemple des problèmes de trafic routier et reste un problème important pour comprendre le cas vectoriel.

Il est connu que, en général, le problème de Cauchy pour l'équation (3) n'admet pas de solution régulière globale en temps, plutôt dû à son caractère non-linéaire qu'à la non régularité des données initiales. Il faut donc considérer une formulation faible de ce problème. Cependant, le problème de Cauchy reste mal posé dans ce cadre faible,

notamment parce que sa solution peut ne pas être unique. Dans [Kru70], Kruzhkov prouve que le problème de Cauchy pour (3) est bien posé sous la condition que la solution vérifie des inégalités d'entropie, celles-ci permettant de sélectionner parmi les solutions faibles celle qui est physiquement admissible. Ce résultat a été établi en prouvant la convergence d'une suite de solutions de l'équation (3) avec viscosité (c'est-à-dire avec un terme $\varepsilon \Delta u$ dans le second membre) vers l'unique solution de l'équation non-visqueuse. Du point de vue mathématique, les outils utilisés ont été des estimations de la norme L^∞ et de la variation totale des suites approchées. La limite appartient ainsi à l'espace $L^\infty \cap BV$, qui est l'espace naturel pour l'étude des équations scalaires.

Dans le contexte des systèmes, la preuve de Kruzhkov n'a pu être établie que dans des cas particuliers. Notamment, puisque pour $n > 1$ il n'est possible pas en général d'établir une estimation de la variation totale des suites approchées. D'autres outils sont utilisés, quand l'on dispose toutefois d'une borne de la norme L^∞ , comme les résultats de compacité développés par Tartar ([Tar79]) et mis en oeuvre par DiPerna ([DiP83]). Cependant, cette stratégie ne peut être appliquée que pour très peu de systèmes, dont certains de taille 2, comme le système de la dynamique des gaz isentropique, ou dans la classe de systèmes dits de Temple.

Dans ce contexte, un cas particulier du problème de Cauchy s'avère être essentiel, tant pour la compréhension de celui-ci que pour la construction de schémas numériques approchant les solutions de (2). Il s'agit du problème de Riemann, c'est-à-dire le problème de Cauchy avec une donnée initiale constituée de deux états constants séparés par une discontinuité. On s'attend à ce que la structure de la donnée se propage de façon auto-semblable, c'est-à-dire que la solution d'un tel problème ne dépende que du rapport $\frac{x}{t}$. Le résultat d'existence et d'unicité de solution du problème de Riemann pour un système de lois de conservation général en une dimension d'espace est dû à Lax ([Lax57]). Il n'est valable que pour des données initiales à variation totale petite, et admet l'hypothèse que la solution ne soit constituée que d'ondes simples, c'est-à-dire des chocs, des discontinuités de contact ou des détente. Pour des données initiales arbitraires, une étude au cas par cas est nécessaire.

Dans ce mémoire nous nous sommes intéressés à trois problèmes concernant les équations du type (2) et (3).

Le premier porte sur la linéarisation d'un problème aux limites pour l'équation (3) autour d'une solution particulière de cette équation. Cette question est liée à l'étude de la stabilité et de l'instabilité des écoulements par rapport aux perturbations des données. Pour les équations hyperboliques, le problème de la stabilité non-linéaire de ses solutions s'avère être en général un problème difficile. Un problème plus abordable et qui est un premier pas vers la résolution de cette question est celui de la stabilité linéarisée. Dans le cas des problèmes avec bord, Bardos, Le Roux et Nédélec ([BLN79]) ont appliquée la stratégie de Kruzhkov pour prouver l'existence d'une unique solution vérifiant des inégalités d'entropie. Nous considérons ici la solution fournie par ce moyen et étudions le problème aux limites pour l'équation linéarisée.

Le deuxième problème porte sur des modèles de relaxation pour les équations (2). Si l'on néglige les effets extérieurs, de nombreux phénomènes physiques sont décrits par des équations hyperboliques, et leur évolution est ainsi gouvernée par les variations de flux de leurs composants. Parfois cependant, d'autres facteurs tels que des réactions

chimiques, des échanges thermiques ou la présence de forces extérieures au système peuvent intervenir de manière non négligeable. Les quantités U_i ne sont alors plus conservées et dans ce cas, ce n'est plus une équation homogène comme (2) qui décrit l'évolution du système mais une équation avec un terme source :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(U) = S(U).$$

Nous nous intéressons à un type particulier d'équations hyperboliques avec terme source qui sont les systèmes de relaxation. La plupart des systèmes physiques dont nous parlons admettent naturellement un état d'équilibre qui tend à se maintenir au cours du temps et si une perturbation est appliquée à cet équilibre, ils tendent rapidement à relaxer vers l'équilibre. Du point de vue mathématique, ce processus de relaxation est décrit par un système avec un terme source du type

$$S(U) = \frac{1}{\varepsilon} R(U),$$

où ε représente un temps de relaxation. Celle-ci se faisant à une échelle de temps beaucoup plus petite que celle caractéristique de l'évolution du système, ε est très petit. Quand $\varepsilon = 0$, on a formellement $R(U) = 0$ et le système retrouve l'équilibre. Le sujet de l'analyse théorique et de l'approximation numérique des systèmes hyperboliques avec relaxation fait l'objet d'une vaste littérature, un travail fondamental étant [CLL94], où les auteurs étudient de façon générale ce type d'équations. Dans [JX95], Jin et Xin proposent une classe de schémas numériques, des *schémas de relaxation*, basés sur l'approximation des lois de conservation scalaires par des systèmes de relaxation. Ces auteurs ont mis en évidence l'intérêt de construire des schémas numériques de ce type : les systèmes de relaxation se comportant bien à la limite $\varepsilon = 0$ constituent, du point de vue numérique, un moyen d'approcher simplement un système de lois de conservation. En effet, il peut être coûteux ou difficile d'écrire un solveur de Riemann pour le terme non linéaire $f(u)$. On introduit alors parfois intentionnellement des termes de relaxation artificiels dans les systèmes homogènes, ce qui permet de résoudre, à chaque pas de temps, un système linéaire (ou linéairement dégénéré), ce qui du point de vue discret est beaucoup plus simple.

Dans ce mémoire, nous avons étudié deux modèles de systèmes avec relaxation. Le premier est celui introduit dans [JX95], pour lequel nous prouvons par une nouvelle méthode la convergence d'un schéma numérique approchant la loi de conservation scalaire (3). Le deuxième est un modèle de relaxation pour le système d'Euler de la dynamique des gaz, que nous avons considéré dans le cadre d'un problème de couplage sur lequel nous reviendrons dans la suite.

Le dernier type de problèmes auxquels nous nous sommes intéressés consiste en des problèmes de couplage du type « modèle à l'équilibre - modèle hors équilibre ». Dans un contexte industriel, notamment dans le cadre de la thermohydraulique nucléaire, on est souvent confronté à modéliser des systèmes de grande complexité qui sont plus facilement abordables quand chacune de leurs composantes est décrite par un modèle précis. En effet, dans la simulation numérique de systèmes à plusieurs composantes ou ayant un domaine de définition de géométrie complexe, on utilise fréquemment des modèles différents pour décrire plus précisément chaque composante ou chaque partie du domaine.

Dans la simulation des réacteurs, afin de mieux décrire chaque partie du réacteur et d'obtenir localement une meilleure description géométrique de l'écoulement, des codes numériques différents, approchant différents systèmes d'équations, sont utilisés (cf. [ACC+05a]). Par exemple, dans les tuyaux, on peut utiliser un modèle à 6 équations (unidimensionnel) décrivant la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie de chaque fluide qui y coule (eau et vapeur), et dans le coeur du réacteur un modèle à 3 équations, traduisant la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie globales du mélange diphasique eau-vapeur. Ce dernier modèle peut être encore remplacé par un modèle à 4 équations avec un terme de relaxation décrivant le transfert de masse entre les deux phases. Un autre cas où ce type de procédure de couplage intervient est la modélisation d'un écoulement en transition de milieux libre à milieux poreux (cf. [ACC+05a] et les références qui y sont citées).

Du point de vue théorique, cette procédure consiste à coupler deux systèmes d'équations aux dérivées partielles séparés par une interface. Cette interface n'est pas physique, au sens où elle n'est pas présente dans le vrai modèle mais a été introduite fictivement pour marquer la séparation des composantes modélisées. Il est évident que les deux systèmes doivent être en quelque sorte compatibles entre eux. La problématique du couplage industriel implique de comprendre comment coupler les modèles simulés de part et d'autre de l'interface de façon à pouvoir décrire l'écoulement global de façon correcte. Ce problème peut être analysé à trois niveaux distincts : au niveau de la modélisation physique, pour choisir la bonne information à transmettre à l'interface ; au niveau de l'analyse mathématique du problème couplé ainsi obtenu ; enfin, au niveau de l'analyse et simulation numérique de celui-ci. Relativement au premier point, il faut définir des conditions, dites conditions de transmission, précisant l'information échangée entre les systèmes à l'interface de couplage. Dans la plupart des cas, c'est le choix physique qui dicte ces conditions de transmission.

Dans ce contexte, dans un premier temps nous avons étudié, du point de vue numérique, un problème modèle pour ce type de couplage, qui est celui du couplage entre une loi de conservation scalaire et un modèle de relaxation qui lui est associé. Nous avons montré dans un cadre simple un résultat de convergence d'un schéma numérique couplé vers la solution du problème couplé. Dans un deuxième temps, nous nous sommes proposés d'étudier le problème du couplage entre le système d'Euler de la dynamique des gaz et un système de relaxation, dit HRM (de l'anglais Homogeneous Relaxation Model), qui lui est associé. Au niveau vectoriel, l'étude du problème couplé et en particulier des conditions de couplage est beaucoup plus complexe qu'au niveau scalaire. La condition de couplage qui est proposée (qui est une extension de celle introduite par Godlewski et Raviart dans [GR04]) requiert de connaître la structure du problème de Riemann pour les deux systèmes à coupler, notamment le signe de la vitesse des ondes qui la composent. Nous avons ainsi fait cette étude dans ce cas, ce qui nous a permis d'étudier le problème de Riemann couplé dans une classe particulière de solutions, celle des fonctions continues à l'interface.

Nous décrivons dans la suite plus en détail le plan et le contenu de chaque partie de ce mémoire.

I. Linéarisation d'un problème aux limites pour une loi de conservation scalaire.

Considérons la loi de conservation scalaire (3) et u une solution particulière de cette équation. Étudier la stabilité linéarisée de u correspond à déterminer le comportement asymptotique des solutions de l'équation linéarisée

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(f'(u)v) = 0. \quad (4)$$

Quand la solution de base u présente des discontinuités, l'équation (4) devient une équation à coefficients discontinus et n'admet en générale de solution dans aucun espace de fonctions.

Dans cette première partie, on s'intéresse, tant d'un point de vue théorique que numérique, à la linéarisation d'une loi de conservation scalaire autour d'une solution entropique d'un problème aux limites pour celle-ci. Cette étude se base sur les travaux de Godlewski, Olazabal et Raviart ([GOR98], [GOR99], [GR00]) sur la linéarisation de systèmes hyperboliques de lois de conservation dans le cadre du problème de Cauchy. En suivant leur approche, nous étudions le problème aux limites pour l'équation (4),

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(f'(u)v) = 0, \\ v(x, 0) = v_0(x), \\ v(0, t) = b(t), \end{cases} \quad (5)$$

lorsque u est la solution du problème aux limites pour l'équation (3) :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}f(u) = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \\ u(0, t) = a(t). \end{cases} \quad (6)$$

Le caractère non-linéaire de (6) ne permet pas que la condition aux limites $u(0, t) = a(t)$ se vérifie au sens fort et dans [BLN79], les auteurs ont précisé le sens à donner à cette condition aux limites.

Dans le cas où u présente une discontinuité sur une courbe de choc, nous construisons une solution mesure pour (4), comportant une masse de Dirac concentrée sur la courbe de discontinuité de u . Nous nous proposons ensuite de justifier que, dans le cas particulier où f est une fonction convexe, la linéarisation de la condition aux limites proposée par Bardos, Le Roux et Nédélec conduit à une formulation de la condition aux limites pour le problème (5) qui est cohérente avec sa nature linéaire. Nous abordons ensuite l'approximation numérique des solutions de l'équation linéarisée, en reprenant un schéma numérique proposé dans [GOR98] pour le cas du problème de Cauchy. Ce type d'étude concernant le problème mixte peut se justifier dans le cadre des systèmes couplés comme ceux étudiés dans les deuxième et troisième parties.

II. Lois de conservation scalaires : approximation par relaxation et couplage

Nous considérons ici le modèle de relaxation de Jin et Xin ([JX95]) :

$$\begin{cases} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t} + a^2 \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} = \frac{1}{\varepsilon} (f(u_\varepsilon) - v_\varepsilon), \end{cases} \quad (7)$$

où f est le flux de (3) et a une constante positive. Ce modèle décrit un processus de relaxation pour l'équation scalaire (3). Formellement, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, la limite (u, v) des solutions $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ de (7) vérifie $v = f(u)$, et u est alors solution de (3). L'équation (3) est donc celle qui décrit l'état d'équilibre pour les solutions de (7). Cette limite formelle devient exacte, pourvu que l'on impose une condition de stabilité pour les solutions de (7), qui se traduit par

$$-a < f'(u) < a, \quad \forall u.$$

Dans la deuxième partie de ce mémoire, nous reprenons le modèle de relaxation (7) et nous nous proposons de montrer, dans un premier temps, la convergence d'un schéma numérique pour approcher les solutions de (7). Le premier chapitre de cette partie a ainsi pour but une étude théorique et numérique du modèle (7). Nous présentons, d'une part, des résultats d'existence et unicité de solution de (7). Ces résultats sont classiques dans la théorie des systèmes de relaxation, mais pour une question de cohérence nous choisissons de les présenter ici. D'autre part, dans [LS01] Lattanzio et Serre considèrent un schéma numérique pour approcher les solutions de (7) et prouvent, en utilisant une technique de compacité par compensation, la convergence des solutions approchées vers une solution entropique de l'équation à l'équilibre (3), lorsque le temps de relaxation ε et le pas de maillage tendent vers 0. Nous nous proposons ici de présenter une nouvelle méthode pour démontrer ce résultat, basée sur des estimations de la variation totale des solutions approchées.

Le troisième chapitre de cette partie a pour but l'étude du couplage, dans un cadre simple, entre l'équation (3) et le système de relaxation (7). Ceci est l'exemple le plus simple d'un couplage du type modèle de relaxation - modèle à l'équilibre. Puisque l'équilibre se traduit par une relation fonctionnelle entre les variables relaxées, les systèmes de relaxation sont par nature des systèmes de taille supérieure par rapport aux modèles à l'équilibre. Ce type de couplage se traduit alors toujours par un couplage entre systèmes de tailles différentes. En reprenant la définition de couplage par état introduite par Godlewski et Raviart dans [GR04], notion que l'on présente dans un cadre général au deuxième chapitre de cette partie, on définit une condition de couplage pour le système couplé. Dans un premier temps on s'intéresse alors à l'existence de solution du problème couplé, lorsque le flux f est une fonction strictement monotone. Dans un deuxième temps, nous proposons une méthode numérique double-flux pour approcher les solutions du problème couplé, en adaptant à ce contexte la méthode proposée par Abgrall et Karni dans [AK01]. En suivant la même stratégie que dans le premier chapitre, nous avons pu montrer la convergence du schéma numérique couplé, dans le cas où la fonction flux est telle que $f'(u) > 0, \forall u$.

III. Le couplage entre le système de la dynamique des gaz et le système HRM.

Cette dernière partie concerne le couplage de systèmes hyperboliques d'équations aux dérivées partielles issus de la thermohydraulique.

Les modèles que nous avons étudiés rentrent dans la problématique principale du groupe de travail hebdomadaire *Écoulements Diphasiques* qui a lieu dans le cadre d'une collaboration entre le Commissariat à l'Énergie Atomique et le Laboratoire Jacques-Louis Lions de l'Université Pierre et Marie Curie, où j'ai effectué ma thèse. Une question abordée dans ce groupe de travail est le couplage de modèles mathématiques ou de codes numériques décrivant la thermohydraulique de réacteurs nucléaires.

Dans ce contexte, nous avons étudié le problème du couplage entre le système d'Euler de la dynamique des gaz et un système de relaxation, dit HRM (de l'anglais Homogeneous Relaxation Model). Le système d'Euler s'écrit

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \frac{\partial}{\partial x}((\rho e + p)u) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Il traduit, pour un fluide compressible non visqueux en dimension 1, les lois de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie totale. Ci-dessus, ρ représente ainsi la densité du fluide, u la vitesse de l'écoulement et $e = \frac{1}{2}u^2 + \varepsilon$ l'énergie totale spécifique, donnée par la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie interne spécifique ε . Le système (8) doit être fermé par une *équation d'état* qui exprime en général la pression p en fonction de ρ et de ε .

Dans un cadre général, ce modèle peut décrire des phénomènes complexes tels que des transitions de phase. Nous allons nous intéresser ici à un modèle simple de transition de phase (liquide-gazeuse), qui correspond au système (8), muni de la loi de pression

$$p = p_E(\rho, \varepsilon) = \begin{cases} (\gamma_1 - 1)\rho\varepsilon, & \rho \leq \rho_1^*, \\ (\gamma_1 - 1)\rho_1^*\varepsilon = (\gamma_2 - 1)\rho_2^*\varepsilon, & \rho_1^* \leq \rho \leq \rho_2^*, \\ (\gamma_2 - 1)\rho\varepsilon, & \rho \geq \rho_2^*. \end{cases} \quad (9)$$

Ici ρ_1^* et ρ_2^* correspondent à des densités de saturation des phases gazeuse et liquide, respectivement. Pour des densités inférieures à ρ_1^* , le fluide est ainsi en phase vapeur, pour des densités supérieures à ρ_2^* , en phase liquide, et pour des densités entre ρ_1^* et ρ_2^* , le fluide est un mélange de gaz et de liquide. En phase pure le fluide évolue selon une loi d'état du type gaz parfait et en présence de mélange les pressions correspondant aux deux phases sont supposées égales.

Le système (8) avec une loi de pression ainsi définie présente un défaut de régularité, puisque (9) ne définit pas une fonction de classe C^1 . Du point de vue hyperbolique, ceci introduit une discontinuité au niveau des valeurs propres de (8). Il s'avère alors plus simple de remplacer le modèle (8)-(9), par un modèle augmenté mais ayant de meilleures *propriétés hyperboliques*. Le modèle que nous allons considérer est le modèle

homogène de relaxation, qui est donné par le système

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(\rho\alpha) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho\alpha u) = \lambda_0\rho(\alpha_{eq}(\rho) - \alpha), \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \frac{\partial}{\partial x}((\rho e + p)u) = 0, \end{cases} \quad (10)$$

et qui correspond au système de la dynamique des gaz avec une équation supplémentaire de relaxation. La variable α représente un taux de présence de la phase vapeur dans le mélange et la première équation de (10) décrit les transferts de masse entre les deux phases. La pression p prend désormais la forme

$$p = p_R(\alpha, \rho, \varepsilon) = (\gamma_1\alpha + \gamma_2(1 - \alpha) - 1)\rho\varepsilon,$$

et, quand le temps de relaxation $\frac{1}{\lambda_0} \rightarrow 0$, on a

$$\alpha \longrightarrow \alpha_{eq}(\rho),$$

avec

$$p_R(\alpha_{eq}(\rho), \rho, \varepsilon) = p_E(\rho, \varepsilon).$$

Dans cette troisième partie nous étudions le couplage à une interface fixe, placée en $x = 0$, entre le système de la dynamique des gaz (8) et le système HRM (10). En suivant la série de travaux [ACC+05a], [ACC+05b], [ACC+c] et [ACC+05d], nous proposons des conditions de couplage au niveau de l'interface basées sur la définition du couplage par état introduite dans [GLR05] et sur un choix des variables à coupler. Notre but a été d'effectuer une étude théorique des conditions de couplage et du problème de Riemann couplé. Pour ce faire, il a fallu étudier les ondes et le signe de leur vitesse pour le système HRM, puisque le problème du couplage fait intervenir la solution du problème de Riemann et en particulier la vitesse des ondes qui la composent. Nous avons ainsi pu décrire les conditions de couplage par moyen d'équations analytiques reliant les vecteurs $(\rho, u, p)(0^-, t)$ et $(\alpha, \rho, u, p)(0^+, t)$ et, dans un dernier temps, résoudre le problème de Riemann couplé dans la classe des solutions continues à l'interface.

Première partie

Linéarisation d'un problème aux
limites pour une loi de
conservation scalaire

Introduction

Un des problèmes auquel on s'intéresse dans le cadre de la mécanique des milieux continus est celui de la stabilité des écoulements. Comme ce type de problème s'avère parfois complexe du point de vue analytique, un premier pas pour sa résolution consiste à étudier la stabilité linéarisée d'un certain écoulement de base donné, ce qui se traduit par l'étude du comportement asymptotique en temps des solutions de l'équation linéarisée autour de l'écoulement de base. Dans le contexte des écoulements modélisés par des lois de conservation, les solutions peuvent présenter des discontinuités, typiquement des sauts correspondant à la formation de chocs ou à des discontinuités de contact. Dans ce cas, l'équation linéarisée est une équation de conservation avec des coefficients discontinus et elle n'a plus de sens dans des espaces de fonctions, ses solutions étant des solutions mesures, composées de masses de Dirac concentrées sur les lignes de discontinuité de la solution de base.

Dans cette première partie de la thèse nous nous intéressons à l'étude d'un problème aux limites pour l'équation scalaire

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(f'(u)v) = 0. \quad (1)$$

Ce problème est issu d'un problème de linéarisation simple, celui de la linéarisation de la loi de conservation scalaire

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}f(u) = 0 \quad (2)$$

autour d'une solution entropique u d'un problème aux limites pour cette équation. Décrivons plus en détail ce problème de linéarisation.

Soient u_0 et a des fonctions données et considérons le problème mixte pour l'équation (2) dans le quart de plan $\{(x, t) : x \geq 0, t \geq 0\}$, de donnée initiale u_0 ,

$$\begin{cases} u_t + (f(u))_x = 0, & x > 0, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x > 0, \end{cases}$$

et condition aux limites

$$u(0, t) = a(t),$$

condition à prendre dans un sens faible qui sera précisé dans la premier chapitre de cette partie. La théorie classique pour ce type de problèmes est due à C. Bardos, A. LeRoux et J.-C. Nédélec qui prouvent dans [BLN79] un résultat d'existence et d'unicité de solution entropique pour le problème mixte, analogue à celui de S. N. Kruzhkov ([Kru70]) pour le problème de Cauchy.

Considérons u une solution entropique du problème mixte et supposons a_ε une perturbation de la condition aux limites a dépendant de façon régulière d'un petit paramètre ε :

$$a_\varepsilon = a + \varepsilon b_\varepsilon + \dots$$

Supposons aussi que l'on peut développer la solution u_ε du problème mixte correspondant, de condition aux limites a_ε , sous la forme

$$u_\varepsilon = u + \varepsilon v_\varepsilon + \dots \quad (3)$$

Alors, au moins formellement, on obtient que, à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, la perturbation du premier ordre

$$v = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{u_\varepsilon - u}{\varepsilon} \quad (4)$$

est solution d'un problème mixte pour l'équation linéaire (1), de condition aux limites b . Si la solution de base u est une fonction régulière, (1) est une équation linéaire à coefficients réguliers et sa résolution ne pose pas de difficulté majeure. Mais il est connu de la théorie classique des systèmes hyperboliques que les solutions de (2) peuvent développer des discontinuités en temps fini même si les données sont des fonctions régulières. Si l'on est dans cette situation, (1) devient une équation à coefficients discontinus. En suivant l'approche introduite par E. Godlewski, M. Olazabal et P.-A. Raviart dans [GOR98], [GOR99] et [GR00], nous allons montrer que le problème mixte pour l'équation (1) admet dans ce cas des *solutions mesures* composées de masses de Dirac concentrées sur les courbes de discontinuité de u . Pour cela, on utilise la définition de produit de Volpert (cf. [Vol67], [DLM95]) pour donner un sens au produit de la fonction discontinue $f'(u)$ par de telles mesures. L'approche utilisée est une approche directe. Nous voulons toutefois faire référence aux travaux de F. Bouchut et F. James qui, dans [BJ98a] et [BJ98b], justifient l'existence d'une solution mesure du problème de Cauchy pour l'équation (1) comme étant la dérivée de la solution à variation bornée w de l'équation non-conservative

$$\frac{\partial w}{\partial t} + f'(u) \frac{\partial w}{\partial x} = 0,$$

dans le contexte des solutions de dualité. Notre travail ne rentre pas dans ce cadre.

Le plan de cette première partie est le suivant. Dans un premier temps, nous présentons la théorie de Bardos, LeRoux et Nédélec sur les problèmes mixtes. Dans un deuxième temps nous nous intéressons, du point de vue théorique, au problème mixte pour l'équation (1), quand la fonction u présente une discontinuité de saut sur une courbe $\Sigma = \{x = \Phi(t), t \geq t_0\}$, sur laquelle les relations de saut de Rankine-Hugoniot sont vérifiées, u étant régulière en dehors de Σ . Nous nous restreignons au cas où la discontinuité ne rencontre pas la frontière $x = 0$. Sous cette hypothèse, nous présentons un résultat d'existence de solution mesure composée d'une masse de Dirac

concentrée sur la courbe Σ . Nous montrerons aussi, dans le cas où le flux f est une fonction convexe, que la linéarisation de la condition aux limites pour le problème non linéaire conduit à une formulation de la condition aux limites pour l'équation linéarisée cohérente avec celle donnée par la théorie des équations de transport linéaires. Nous présentons encore un exemple simple pour lequel le développement formel (3) est valable et pour lequel la limite (4) correspond bien à la solution mesure du problème aux limites pour l'équation (1). Dans un troisième temps nous nous intéressons à l'approximation numérique du problème linéarisé. Nous présentons des tests numériques effectués ayant pour base le schéma de Roe linéarisé proposé par Godlewski, Olazabal et Raviart dans [GOR98].

Étude théorique du problème linéarisé

1.1 Le problème aux limites pour une loi de conservation scalaire

Nous présentons ici la théorie classique sur le problème aux limites pour les lois de conservation hyperboliques. Nous nous restreindrons aux équations scalaires et, sans perte de généralité, au problème aux limites dans le quart de plan $[0, +\infty[\times [0, +\infty[$.

Soient $u_0 \in BV([0, +\infty[)$ et $a \in BV([0, T])$, $\forall T > 0$, des fonctions données. Considérons la loi de conservation scalaire

$$u_t + (f(u))_x = 0 \quad (1.1)$$

et le problème mixte pour l'équation (1.1) dans $[0, +\infty[\times [0, +\infty[$, de donnée initiale u_0 ,

$$\begin{cases} u_t + (f(u))_x = 0, & x > 0, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x > 0, \end{cases} \quad (1.2)$$

et condition aux limites

$$u(0, t) = a(t). \quad (1.3)$$

On considère que l'espace admissible pour les états u dans les équations ci-dessus est un ouvert $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}$. Le flux f est une fonction régulière donnée, définie sur \mathcal{U} et à valeurs dans \mathbb{R} .

Des exemples simples montrent qu'il existe une différence structurelle entre le problème aux limites et le problème de Cauchy pour les équations hyperboliques. Notamment le fait que la condition aux limites au sens fort (1.3) ne peut pas toujours être satisfaite, le problème aux limites ainsi défini n'étant pas, en général, bien posé dans aucun espace de fonctions. Pour illustrer ce fait, prenons un exemple où le flux f vérifie $f' > 0$ à la frontière $x = 0$, le cas plus simple étant $f(u) = u$. La solution du problème (1.2)-(1.3) peut alors s'obtenir par la méthode des caractéristiques (qui rentrent dans le domaine sur le bord $x = 0$) et est donnée par

$$u(t, x) = \begin{cases} u_0(x - t), & x > t, \\ a(t - x), & 0 < x < t. \end{cases}$$

La condition aux limites au sens fort (1.3) est ici vérifiée. Prenons maintenant l'exemple où le flux a une dérivée négative sur les points du bord, par exemple $f(u) = -u$. À nouveau par la méthode des caractéristiques (qui sont maintenant sortantes sur les points du bord), on obtient cette fois que le problème (1.2) a comme solution la fonction

$$u(t, x) = u_0(x + t)$$

et dans ce cas la condition au bord (1.3) n'est pas prise en compte.

Ces deux exemples simples montrent que le sens de la condition aux limites en $x = 0$ est à préciser et que, selon la fonction f , il peut exister ou non une solution du problème aux limites (1.2)-(1.3) lorsque la condition (1.3) est imposée fortement.

Le problème mixte pour les lois de conservation scalaires a été étudié pour la première fois par C. Bardos, A. LeRoux et J.-C. Nédélec dans [BLN79]. Dans ce travail, les auteurs ont donné un sens à la condition aux limites à prendre pour le problème (1.2), en considérant, comme pour le problème de Cauchy (cf. [Kru70]), le problème mixte comme la limite des problèmes paraboliques approchés

$$\begin{cases} u_{\varepsilon t} + (f(u_{\varepsilon}))_x = \varepsilon \Delta u_{\varepsilon}, & x > 0, t > 0, \\ u_{\varepsilon}(x, 0) = u_0(x), & x > 0, \\ u_{\varepsilon}(0, t) = a(t), & t > 0, \end{cases} \quad (1.4)$$

quand le paramètre de viscosité $\varepsilon > 0$ tend vers zéro. La théorie classique sur ce type d'équations donne l'existence d'une solution u_{ε} de (1.4) qui est régulière à l'intérieur de son domaine, sa régularité en $x = 0$ et en $t = 0$ dépendant de celle des données $u_0(x)$ et $a(t)$. D'après Bardos, LeRoux et Nédélec, la suite u_{ε} des solutions du problème régularisé (1.4) admet une limite u dans $L^1_{loc}([0, +\infty[\times]0, +\infty[)$, solution entropique du problème mixte (1.2), de condition aux limites a , au sens suivant :

Théorème 1.1 (Bardos, LeRoux, Nédélec, [BLN79]).

Soient $u_0 \in BV([0, +\infty[)$ et $a \in BV([0, T])$, $\forall T > 0$, et u la limite, dans $L^1_{loc}([0, +\infty[\times]0, +\infty[)$, de la suite u_{ε} des solutions du problème (1.4), lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Alors $u \in BV([0, +\infty[\times]0, T])$, $\forall T > 0$, et u est une solution faible, dans $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$, du problème (1.2)

$$\begin{cases} u_t + (f(u))_x = 0, & x > 0, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x > 0. \end{cases}$$

De plus, pour tout $\varphi \in C^1_0([0, +\infty[\times]0, +\infty[)$, $\varphi \geq 0$, et pour tout $k \in \mathbb{R}$, u vérifie l'inégalité d'entropie

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \left(|u - k| \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{sgn}(u - k) (f(u) - f(k)) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx dt + \\ & \int_0^{+\infty} |u_0(x) - k| \varphi(x, 0) dx + \int_0^{+\infty} \operatorname{sgn}(a(t) - k) (f(u(0, t)) - f(k)) \varphi(0, t) dt \geq 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Cette solution est unique.

Remarque 1.1.

Dans le théorème ci-dessus, $u(0, t)$ désigne la trace, au sens des fonctions à variation bornée, de la fonction $u \in BV([0, +\infty[\times]0, T[)$, $\forall T > 0$, sur la droite $x = 0$ (nous référons par exemple l'ouvrage [EG92] pour des détails sur les propriétés des fonctions BV).

En considérant des fonctions test φ approchant la fonction caractéristique de l'ensemble $\{0\} \times]0, +\infty[$, les auteurs montrent que la condition aux limites pour le problème (1.2) peut s'interpréter dans les termes suivantes : si l'on considère une donnée $a(t)$ en $x = 0$, la trace $u(0, t)$ de u en $x = 0$ doit vérifier, pour presque tout $t > 0$, l'inégalité

$$(f(u(0, t)) - f(k)) \operatorname{sgn}(u(0, t) - k) \leq 0, \quad \forall k \in I(u(0, t), a(t)),$$

où $I(u(0, t), a(t))$ désigne l'intervalle

$$[\min\{u(0, t), a(t)\}, \max\{u(0, t), a(t)\}].$$

L'inégalité ci-dessus peut s'écrire sous la forme

$$\frac{f(u(0, t)) - f(k)}{u(0, t) - k} \leq 0, \quad \forall k \in I(u(0, t), a(t)). \quad (1.6)$$

La condition aux limites pour le problème (1.2) doit alors être entendue dans le sens de (1.6).

Nous décrivons maintenant une autre formulation pour le problème mixte, proposée par F. Dubois et P. LeFloch dans [DL88]. Pour u_g et $u_d \in \mathcal{U}$, on désigne par $w(\frac{x}{t}; u_g, u_d)$ la solution du problème de Riemann

$$\begin{cases} u_t + (f(u))_x = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} u_g, & x < 0, \\ u_d, & x > 0. \end{cases} \end{cases} \quad (1.7)$$

Rappelons que le problème de Riemann pour une loi de conservation est le problème de Cauchy avec une donnée initiale correspondant à un *saut* séparant deux états constants, comme la fonction u_0 ci-dessus, et que pour ce type de problème, la structure de la donnée initiale se propage de façon auto-semblable, c'est-à-dire sa solution ne dépend que du rapport $\frac{x}{t}$.

On pose, pour $t > 0$,

$$\mathcal{O}(a(t)) = \{w(0^+; a(t), u_d) : u_d \in \mathcal{U}\}.$$

L'ensemble $\mathcal{O}(a(t))$ est ainsi, pour chaque t fixé, l'ensemble des traces en $x = 0^+$ des solutions de tous les problèmes de Riemann pour l'équation (1.1), dont la donnée initiale prend la valeur $a(t)$ pour $x < 0$.

Dans [DL88], les auteurs montrent que l'unique solution du problème mixte donnée par le théorème 1.1 est telle que sa trace $u(0, t)$ en $x = 0$ vérifie, pour presque tout $t > 0$, la condition

$$u(0, t) \in \mathcal{O}(a(t)). \quad (1.8)$$

Réciproquement, si u est une solution faible dans $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ de la loi de conservation scalaire (1.1), telle que $u \in BV([0, +\infty[\times]0, T])$, pour tout $T > 0$, et que sa trace en $x = 0$ vérifie (1.8), alors u est l'unique solution du problème mixte au sens de Bardos, Le Roux et Nédélec. Autrement dit, pour une équation scalaire, la condition de Bardos, Le Roux et Nédélec (1.6) et la condition de Dubois et LeFloch (1.8) sont équivalentes.

Dans le cas particulier où la donnée initiale et la condition aux limites sont respectivement des constantes $u_0 \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$, dans [DL88] on montre que la solution du problème mixte est précisément la restriction à l'ensemble $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ de la solution du problème de Riemann (1.7), avec $u_g = a$ et $u_d = u_0$.

Supposons maintenant que le flux f est une fonction strictement convexe, vérifiant $f'' \geq c$, avec c une constante strictement positive. Une telle fonction vérifie $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$ et admet un minimum absolu $f(u^*)$. De plus, pour chaque $a < u^*$ (respectivement $a > u^*$), il existe $\bar{a} > u^*$ (respectivement $\bar{a} < u^*$) unique tel que $f(a) = f(\bar{a})$. Pour une fonction f dans ces conditions, il est immédiat de vérifier que la condition (1.6) équivaut à la condition suivante :

Pour presque tout $t > 0$, $u(0, t)$ vérifie

$$\begin{cases} u(0, t) \in]-\infty, u^*], & \text{si } a(t) \leq u^*, \\ u(0, t) \in]-\infty, \bar{a}(t)] \cup \{a(t)\}, & \text{si } a(t) \geq u^*. \end{cases} \quad (1.9)$$

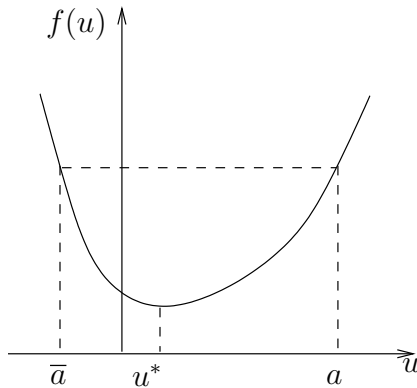


FIG. 1.1 – La fonction convexe f

Dans ce cas, la solution du problème mixte (1.2)-(1.6), avec $a(t) = a \in \mathbb{R}$, $u_0(x) = u_0 \in \mathbb{R}$, est la restriction à $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ de la solution du problème de Riemann pour l'équation (1.1) de donnée initiale

$$\begin{cases} a, & x < 0, \\ u_0, & x > 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire : si $a > u_0$, le choc

$$u(x, t) = \begin{cases} a, & \frac{x}{t} < \frac{f(a) - f(u_0)}{a - u_0}, \\ u_0, & \frac{x}{t} > \frac{f(a) - f(u_0)}{a - u_0}; \end{cases}$$

si $a < u_0$, la raréfaction

$$u(x, t) = \begin{cases} a, & \frac{x}{t} < f'(a), \\ (f')^{-1}\left(\frac{x}{t}\right), & f'(a) \leq \frac{x}{t} \leq f'(u_0), \\ u_0, & \frac{x}{t} > f'(u_0). \end{cases}$$

1.2 Le problème mixte linéarisé

On s'intéresse au problème mixte linéarisé

$$\begin{cases} v_t + (f'(u)v)_x = 0, & x > 0, t > 0, \\ v(x, 0) = v_0(x), & x > 0, \\ v(0, t) = b(t), & t > 0, \end{cases} \quad (1.10)$$

où $v_0 \in BV([0, +\infty[)$ et b sont données et u est la solution entropique du problème mixte (1.2)-(1.6), appelée *solution de base*.

Ce problème est directement lié à l'analyse de la stabilité linéarisée de u par rapport aux perturbations de la condition aux limites, dans le cadre défini par E. Godlewski et P. A. Raviart dans [GR00]. On considère a_ε une perturbation de la condition aux limites a , dépendant d'un petit paramètre ε , de la forme

$$a_\varepsilon = a + \varepsilon b_\varepsilon + \dots,$$

et u_ε la solution du problème aux limites perturbé correspondant, de condition aux limites a_ε (on ne perturbe pas la condition initiale). Si l'on suppose que u_ε admet un développement autour de la solution de base u de la forme

$$u_\varepsilon = u + \varepsilon v_\varepsilon + \dots, \quad (1.11)$$

alors on obtient, à un niveau formel, que la perturbation du premier ordre

$$v = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{u_\varepsilon - u}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v_\varepsilon \quad (1.12)$$

vérifie le problème (1.10), obtenu par linéarisation autour de la solution de base u , où $b = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} b_\varepsilon$ (avec $v_0 = 0$ mais nous allons considérer, ce qui ne change pas la structure du problème (1.10), v_0 une condition initiale appropriée quelconque). Nous ne précisons pas le sens du développement (1.11). Nous allons toutefois exhiber au paragraphe 1.2.2 un exemple simple pour lequel il est valable.

Le problème linéaire (1.10) est un problème classique lorsque la solution de base u est une fonction régulière. Mais si u est une fonction discontinue, l'équation

$$v_t + (f'(u)v)_x = 0 \quad (1.13)$$

est à coefficients discontinus et, en général, le problème aux limites correspondant n'admet de solution dans aucun espace de fonctions. Il faut envisager des solutions dans l'espace des mesures.

La linéarisation des systèmes hyperboliques de lois de conservation a été étudiée entre autre, dans le contexte du problème de Cauchy, par E. Godlewski, M. Olazabal et P.-A. Raviart dans [GOR98] et [GOR99], par Godlewski et Raviart dans [GR00], par C. Bardos et O. Pironneau dans [BP02] et par F. Bouchut et F. James dans [BJ98a], dans le cadre des solutions de dualité. En privilégiant l'approche suivie par les premiers auteurs, nous allons montrer l'existence de solution mesure pour le problème (1.10), lorsque la solution de base u présente une discontinuité sur une courbe de choc.

1.2.1 La solution du problème linéarisé dans le cas où la solution de base est discontinue sur une courbe de choc

Nous étudions le problème (1.10) lorsque la solution de base est un choc. On suppose alors que u est une fonction régulière en dehors d'une courbe

$$\Sigma = \{(x, t) \in [0, +\infty[\times [t_0, +\infty[: x = \phi(t)\},$$

présentant une discontinuité de saut le long de Σ . La fonction ϕ est ici une fonction régulière, au moins de classe C^1 , définie dans un intervalle $[t_0, +\infty[\subseteq [0, +\infty[$ et à valeurs dans $[0, +\infty[$. On suppose $\phi(t_0) = 0$ et on fait l'hypothèse suivante :

H1. *La fonction ϕ est strictement croissante et vérifie*

$$\phi(t) \neq 0, \quad \forall t \neq t_0.$$

Cette hypothèse signifie que l'on n'admet pas une discontinuité sur la frontière $x = 0$.

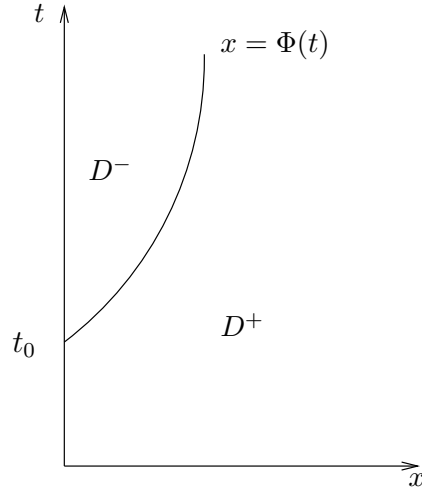
La courbe Σ sépare donc le domaine $[0, +\infty[\times [0, +\infty[$ en deux composantes connexes

$$D^- = \{(x, t) \in [0, +\infty[\times [t_0, +\infty[: x < \phi(t)\}$$

et

$$D^+ = \{(x, t) \in [0, +\infty[\times [t_0, +\infty[: x > \phi(t)\} \cup [0, +\infty[\times [0, t_0[,$$

D^- étant la région « à gauche » de Σ et D^+ la région « à droite » de Σ .

FIG. 1.2 – La courbe Σ

Puisque l'on suppose u régulière en dehors de Σ et à variation bornée dans $[0, +\infty[\times [0, +\infty[$, les fonctions $u|_{D^-}$ et $u|_{D^+}$ admettent des traces sur la courbe Σ et on peut alors définir, pour tout $t > t_0$, des limites latérales en $x = \phi(t)^-$ et en $x = \phi(t)^+$. De plus, sur la courbe Σ , u vérifie les relations de saut de Rankine-Hugoniot.

Étant donnée une fonction w dans ces conditions, à variation bornée dans l'ensemble $[0, +\infty[\times [0, +\infty[$ et régulière en dehors d'une courbe $\Sigma \subseteq [0, +\infty[\times [0, +\infty[$, on notera, pour chaque $t > t_0$, $w^+(\phi(t), t)$ et $w^-(\phi(t), t)$ respectivement les limites

$$w^+(\phi(t), t) = \lim_{\substack{x \rightarrow \phi(t) \\ x > \phi(t)}} w(x, t) \quad \text{et} \quad w^-(\phi(t), t) = \lim_{\substack{x \rightarrow \phi(t) \\ x < \phi(t)}} w(x, t),$$

et par $[w](t)$ le saut de w sur un point $(\phi(t), t)$ de Σ :

$$[w](t) = w^+(\phi(t), t) - w^-(\phi(t), t).$$

Avec cette notation, les relations de saut de Rankine-Hugoniot pour u s'écrivent

$$[f(u)](t) = \phi'(t)[u](t).$$

Dans un cadre général, nous allons considérer b une donnée dans l'espace des mesures bornées $\mathcal{M}([0, +\infty[)$ du type

$$b = \tilde{b}(t) + \bar{b}\delta_{t_0}, \quad (1.14)$$

avec $\tilde{b} \in BV([0, +\infty[)$, δ_{t_0} la mesure de Dirac sur le point t_0 , et \bar{b} une constante. Ce type de donnée a un sens quand, par exemple, la fonction $a(t)$ est discontinue en $t = t_0$ et que l'on perturbe aussi la position de cette discontinuité.

Notre objectif dans cette section est de montrer que le problème (1.10), avec b défini par (1.14), admet une solution mesure de la forme

$$v = \tilde{v} + \alpha(t)\delta_\Sigma, \quad (1.15)$$

où \tilde{v} , la partie fonction de la mesure v , est une fonction appartenant à l'espace $BV([0, +\infty[\times [0, +\infty[)$, $\alpha(t)$ est une fonction régulière et où l'on a désigné par δ_Σ la mesure de Dirac sur la courbe Σ , définie dans l'espace des mesures localement bornées $\mathcal{M}_{loc}([0, +\infty[\times [0, +\infty[)$ par

$$\langle \delta_\Sigma, \varphi \rangle = \int_\Sigma \varphi d\sigma, \quad \forall \varphi \in C_0([0, +\infty[\times [0, +\infty[).$$

On va considérer la paramétrisation suivante pour la courbe Σ :

$$t \in [t_0, +\infty[\longmapsto (\phi(t), t),$$

de sorte que l'on a

$$\langle \delta_\Sigma, \varphi \rangle = \int_{t_0}^{+\infty} \varphi(\phi(t), t) \sqrt{1 + \phi'^2(t)} dt.$$

Pour qu'une telle solution ait un sens, il faut définir le produit de la mesure δ_Σ par la fonction $f'(u)$, qui est discontinue sur la courbe Σ . Ce type de produit a été défini par Volpert dans [Vol67] (voir aussi [DLM95]), où l'on donne un sens au produit $a(u) \frac{du}{dx}$, dans l'espace des mesures, quand u est une fonction à variation bornée dans \mathbb{R} . Lorsque a est la dérivée d'une fonction g de classe C^1 , alors $g(u)$ est une fonction à variation bornée et le produit conservatif $g'(u) \frac{du}{dx}$ est naturellement défini par $\frac{d}{dx} g(u)$, c'est-à-dire la mesure de $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ correspondant à la dérivée de la fonction à variation bornée $g(u)$. Cette définition coïncide avec celle du produit de Volpert, que l'on rappelle ci-dessous. On rappelle d'abord que, pour $u \in BV(\mathbb{R})$, les limites latérales $u^-(x)$ et $u^+(x)$ existent en tout point x , et que, si l'on considère $C(u)$ l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}$ tels que $u'(x)$ existe au sens classique et $S(u)$ l'ensemble des points pour lesquels $u^-(x) \neq u^+(x)$, alors $\mathbb{R} \setminus (C(u) \cup S(u))$ est un ensemble de mesure nulle.

Définition (Produit de Volpert, [Vol67]).

Soient $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable et $u \in BV(\mathbb{R})$. On définit, en presque tout point $x \in \mathbb{R}$, la fonction superposition de Volpert par

$$\widehat{a}(u)(x) := \begin{cases} a(u(x)), & x \in C(u), \\ \int_0^1 a(u^-(x) + s(u^+ - u^-)(x)) ds, & x \in S(u). \end{cases}$$

Si $\widehat{a}(u)$ est intégrable par rapport à la mesure $\frac{du}{dx}$, le produit de Volpert de $a(u)$ par la mesure $\frac{du}{dx}$ est défini par

$$a(u) \frac{du}{dx} := \widehat{a}(u) \frac{du}{dx}.$$

Maintenant, puisque

$$\begin{aligned} \langle \delta_\Sigma, \varphi \rangle &= \int_{t_0}^{+\infty} \varphi(\phi(t), t) \sqrt{1 + \phi'^2(t)} dt \\ &= \int_{t_0}^{+\infty} \langle \delta_{x=\phi(t)}, \varphi(x, t) \sqrt{1 + \phi'^2(t)} \rangle dt \\ &= \int_{t_0}^{+\infty} \langle \delta_{\phi(t)}, \varphi(\cdot, t) \sqrt{1 + \phi'^2(t)} \rangle dt, \end{aligned}$$

où, pour chaque $t > t_0$, $\delta_{\phi(t)}$ désigne la mesure de Dirac concentrée dans le point $\phi(t)$, et u est une fonction discontinue en $x = \phi(t)$, pour chaque $t > t_0$, il est alors naturel de définir le produit $f'(u)\delta_\Sigma$ de sorte que l'on ait, dans l'espace des mesures $\mathcal{M}([0, +\infty[\times [0, +\infty[)$,

$$\langle f'(u)\delta_\Sigma, \varphi \rangle = \int_{t_0}^{+\infty} \langle \widehat{f}'(u)(\cdot, t)\delta_{\phi(t)}, \varphi(\cdot, t)\sqrt{1 + \phi'^2(t)} \rangle dt,$$

où $\widehat{f}'(u)(x, t) = f'(u)(x, t)$, si $x \neq \phi(t)$ et

$$\widehat{f}'(u)(\phi(t), t) = \int_0^1 f'(u^-(\phi(t), t) + s(u^+ - u^-)(\phi(t), t)) ds.$$

Comme

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{+\infty} \langle \widehat{f}'(u)(\cdot, t)\delta_{\phi(t)}, \varphi(\cdot, t)\sqrt{1 + \phi'^2(t)} \rangle dt \\ = \int_{t_0}^{+\infty} \varphi(\phi(t), t)\widehat{f}'(u)(\phi(t), t)\sqrt{1 + \phi'^2(t)} dt, \end{aligned}$$

on définit le produit $f'(u)\delta_\Sigma$ par

$$f'(u)\delta_\Sigma := \widehat{f}'(u)(\phi(t), t)\delta_\Sigma. \quad (1.16)$$

Or, pour $t > t_0$, on a

$$\begin{aligned} \widehat{f}'(u)(\phi(t), t) &= \int_0^1 f'(u^-(\phi(t), t) + s(u^+ - u^-)(\phi(t), t)) ds \\ &= \frac{1}{(u^+ - u^-)(\phi(t), t)} \int_0^1 \frac{d}{ds} \left[f(u^-(\phi(t), t) + s(u^+ - u^-)(\phi(t), t)) \right] ds \\ &= \left[\frac{f(u^+) - f(u^-)}{u^+ - u^-} \right] (\phi(t), t) \\ &= \phi'(t). \end{aligned}$$

On en déduit $\widehat{f}'(u)(\phi(t), t)\delta_\Sigma = \phi'(t)\delta_\Sigma$ et (1.16) implique que le produit $f'(u)\delta_\Sigma$ est donc défini de telle façon que l'on a

$$\begin{aligned} \langle f'(u)\delta_\Sigma, \varphi \rangle &:= \langle \phi'(t)\delta_\Sigma, \varphi \rangle = \langle \delta_\Sigma, \phi'(t)\varphi \rangle \\ &= \int_{t_0}^{+\infty} \phi'(t)\varphi(\phi(t), t)\sqrt{1 + \phi'^2(t)} dt, \end{aligned}$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_0([0, +\infty[\times [0, +\infty[)$.

Maintenant, il est évident que si une mesure comme (1.15) est solution du problème (1.10), alors la fonction \tilde{v} est solution de

$$\begin{cases} v_t + (f'(u)v)_x = 0, & x > 0, t > 0, \\ v(x, 0) = v_0(x), & x > 0, \\ v(0, t) = \tilde{b}(t), & t > 0, \end{cases} \quad (1.17)$$

en dehors de Σ , c'est-à-dire dans D^- et dans D^+ . Puisque dans ces deux ensembles l'équation de conservation (1.13) est une équation de transport linéaire à coefficients réguliers, la théorie classique pour les équations hyperboliques donne l'existence d'une fonction \tilde{v} solution de (1.17), ayant la régularité des données initiale et aux limites, et qui vérifie au sens fort la condition initiale $\tilde{v}(x, 0) = v_0(x)$ et la condition aux limites $\tilde{v}(0, t) = \tilde{b}(t)$ en tout point $t > 0$ tel que $f'(u(0, t)) > 0$.

Lemme 1.1.

Soient $\tilde{b}(t) \in BV([0, +\infty[)$ et $v_0(x) \in BV([0, +\infty[)$ des fonctions données. Alors le problème aux limites (1.10) admet une solution classique \tilde{v} dans $[0, +\infty[\times [0, +\infty[\setminus \Sigma = D^- \cup D^+$, qui vérifie $\tilde{v}(x, 0) = v_0(x)$ et $\tilde{v}(0, t) = \tilde{b}(t)$, pour tout t tel que $f'(u(0, t)) > 0$. La fonction \tilde{v} vérifie, dans chaque domaine $D^* = D^\pm$, la formulation intégrale

$$\int_{D^*} (\tilde{v}\varphi_t + f'(u)\tilde{v}\varphi_x) dxdt + \int_0^{+\infty} f'(u(0, t))\tilde{b}(t)\varphi(0, t) dt + \int_0^{+\infty} v_0(x)\varphi(x, 0) dx = 0, \quad (1.18)$$

pour toute fonction $\varphi \in C^1([0, +\infty[\times [0, +\infty[)$, à support compact dans $\overline{D^*} \setminus \Sigma$, telle que $\varphi(0, t) = 0$, pour tout t tel que $f'(u(0, t)) \leq 0$.

Démonstration.

On fixe le domaine $D^* = D^+$ ou $D^* = D^-$ et pour simplifier la notation on pose $a(x, t) = f'(u(x, t))$, pour tout $(x, t) \in D^*$. Comme (1.10) est un problème de transport linéaire, on peut mettre en place une méthode des caractéristiques. Celles-ci sont les courbes $(x(t), t)$ telles que

$$\frac{dx}{dt} = a(x(t), t),$$

avec $x(0) = x_0$ ou $x(\bar{t}) = 0$. Comme les caractéristiques sont les mêmes que pour la loi de conservation (1.1) et comme les inégalités d'entropie de Lax

$$f'(u^+(\phi(t), t)) < \phi'(t) < f'(u^-(\phi(t), t))$$

sont vérifiées sur la courbe Σ , on conclut que les caractéristiques sont sortantes sur la partie du bord du domaine D^* correspondant à la courbe Σ . De ce fait il ne faut prescrire aucune condition sur cette partie du bord de D^* . On peut alors conclure que sur D^* il existe une solution \tilde{v} de (1.10) vérifiant

$$\frac{d}{dt}\tilde{v}(x(t), t) = -\tilde{v}(x(t), t)\frac{\partial a}{\partial x}(x(t), t),$$

qui peut donc être définie implicitement par

$$\tilde{v}(x, t) = v_0(x_0) - \int_0^t \tilde{v}(x(s), s)\frac{\partial a}{\partial x}(x(s), s) ds,$$

sur les points $(x, t) \in D^*$ appartenant à la caractéristique définie par $\frac{dx}{dt} = a(x, t)$, $x(0) = x_0$, et par

$$\tilde{v}(x, t) = \tilde{b}(\bar{t}) - \int_{\bar{t}}^t \tilde{v}(x(s), s)\frac{\partial a}{\partial x}(x(s), s) ds,$$

sur les points $(x, t) \in D^*$ appartenant à la caractéristique définie par $\frac{dx}{dt} = a(x, t)$, $x(\bar{t}) = 0$, où \bar{t} est tel que $f'(u(0, \bar{t})) > 0$. On déduit facilement l'égalité intégrale (1.18) en intégrant par parties l'équation $\tilde{v}_t + (f'(u)\tilde{v})_x = 0$ contre une fonction test φ vérifiant les conditions énoncées dans le lemme. \square

Nous sommes maintenant en mesure de montrer le résultat principal de cette section.

Théorème 1.2.

Soit $u \in C^1([0, +\infty[\times [0, +\infty[\setminus \Sigma)$ la solution entropique du problème mixte (1.2)-(1.6) et \tilde{v} la solution du problème (1.17) dans $[0, +\infty[\times [0, +\infty[\setminus \Sigma$ donnée par le lemme 1.1. On suppose que la courbe Σ vérifie l'hypothèse H1. Alors, le problème (1.10) admet une solution $\mu \in \mathcal{M}_{loc}([0, +\infty[\times [0, +\infty[) \cap C([0, T[; \mathcal{M}_{loc}(\mathbb{R}))$, pour tout $T > 0$, donnée par (1.15), avec

$$\alpha(t) = \frac{\bar{b} - \int_{t_0}^t \left([f'(u)v](s) - \phi'(s)[v](s) \right) ds}{\sqrt{1 + \phi'^2(t)}}.$$

La mesure μ vérifie

$$\begin{aligned} & \langle \mu_t + (f'(u)\mu)_x, \varphi \rangle \\ &= \int_0^{+\infty} v_0(x)\varphi(x, 0)dx + \int_0^{+\infty} f'(u(0, t))\tilde{b}(t)\varphi(0, t)dt + \langle \bar{b}\delta_{t_0}, \varphi(0, \cdot) \rangle, \end{aligned} \quad (1.19)$$

pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_0^1([0, +\infty[\times [0, +\infty[)$, telle que $\varphi(0, t) = 0$ si $f'(u(0, t)) \leq 0$.

Démonstration.

Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0^1([0, +\infty[\times [0, +\infty[)$. Pour chaque $t > t_0$, on désigne par

$$n_{D^-} = \frac{1}{\sqrt{1 + \phi'(t)^2}}(1, -\phi'(t)) \quad \text{et} \quad n_{D^+} = \frac{1}{\sqrt{1 + \phi'(t)^2}}(-1, \phi'(t)) = -n_{D^-}$$

les normales unitaires extérieures à D^- et à D^+ , respectivement, au point $(\phi(t), t) \in \Sigma$. On a

$$\begin{aligned} \langle \tilde{v}_t + (f'(u)\tilde{v})_x, \varphi \rangle &= - \langle \tilde{v}, \varphi_t \rangle - \langle f'(u)\tilde{v}, \varphi_x \rangle \\ &= - \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} (\tilde{v}\varphi_t + f'(u)\tilde{v}\varphi_x) dxdt \\ &= - \int_{D^-} (\tilde{v}\varphi_t + f'(u)\tilde{v}\varphi_x) dxdt - \int_{D^+} (\tilde{v}\varphi_t + f'(u)\tilde{v}\varphi_x) dxdt. \end{aligned}$$

En intégrant par parties dans D^- et dans D^+ , comme \tilde{v} est solution de l'équation

$\tilde{v}_t + (f'(u)\tilde{v})_x = 0$ sur chacun de ces domaines, on obtient

$$\begin{aligned}
& \langle \tilde{v}_t + (f'(u)\tilde{v})_x, \varphi \rangle = \\
& = - \int_{\Sigma} \left((f'(u^-)\tilde{v}^-, \tilde{v}^-) \cdot n_{D^-} + (f'(u^+)\tilde{v}^+, \tilde{v}^+) \cdot n_{D^+} \right) \varphi \, ds \\
& \quad + \int_0^{+\infty} f'(u(0, t)) \tilde{v}(0, t) \varphi(0, t) \, dt + \int_0^{+\infty} \tilde{v}(x, 0) \varphi(x, 0) \, dx \\
& = \int_{t_0}^{+\infty} \left((f'(u^+)\tilde{v}^+ - f'(u^-)\tilde{v}^-) - \phi'(t)(\tilde{v}^+ - \tilde{v}^-) \right) \varphi(\phi(t), t) \, dt \\
& \quad + \int_0^{+\infty} f'(u(0, t)) \tilde{v}(0, t) \varphi(0, t) \, dt + \int_0^{+\infty} v_0(x) \varphi(x, 0) \, dx, \\
& = \int_{t_0}^{+\infty} \left([f'(u)v](t) - \phi'(t)[v](t) \right) \varphi(\phi(t), t) \, dt \\
& \quad + \int_0^{+\infty} f'(u(0, t)) \tilde{v}(0, t) \varphi(0, t) \, dt + \int_0^{+\infty} v_0(x) \varphi(x, 0) \, dx.
\end{aligned}$$

On en déduit

$$\tilde{v}_t + (f'(u)\tilde{v})_x = \left([f'(u)v](t) - \phi'(t)[v](t) \right) \left(\sqrt{1 + \phi'^2(t)} \right)^{-1} \delta_{\Sigma}, \quad (1.20)$$

dans $\mathcal{M}_{loc}([0, +\infty[\times]0, +\infty[)$.

On calcule maintenant $(\alpha(t)\delta_{\Sigma})_t + (f'(u)\alpha(t)\delta_{\Sigma})_x$ au sens des mesures, où $f'(u)\alpha(t)\delta_{\Sigma} = \phi'(t)\alpha(t)\delta_{\Sigma}$. On a

$$\begin{aligned}
\langle (\alpha(t)\delta_{\Sigma})_t + (\phi'(t)\alpha(t)\delta_{\Sigma})_x, \varphi \rangle &= - \langle \alpha(t)\delta_{\Sigma}, \varphi_t \rangle - \langle \phi'(t)\alpha(t)\delta_{\Sigma}, \varphi_x \rangle \\
&= - \langle \delta_{\Sigma}, \alpha(t)\varphi_t \rangle - \langle \delta_{\Sigma}, \phi'(t)\alpha(t)\varphi_x \rangle,
\end{aligned}$$

pour tout $\varphi \in C_0^1([0, +\infty[\times]0, +\infty[)$, de sorte que

$$\begin{aligned}
& \langle (\alpha(t)\delta_{\Sigma})_t + (\phi'(t)\alpha(t)\delta_{\Sigma})_x, \varphi \rangle \\
& = - \int_{t_0}^{+\infty} \left[\alpha(s)\varphi_t(\phi(s), s) + \phi'(s)\alpha(s)\varphi_x(\phi(s), s) \right] \sqrt{1 + \phi'^2(s)} \, ds \\
& = - \int_{t_0}^{+\infty} \beta(s) \frac{d}{ds} \left(\varphi(\phi(s), s) \right) \, ds \\
& = - \int_{t_0}^{+\infty} \frac{d}{ds} \left(\beta(s)\varphi(\phi(s), s) \right) \, ds + \int_{t_0}^{+\infty} \beta'(s)\varphi(\phi(s), s) \, ds \\
& = \beta(t_0)\varphi(0, t_0) + \int_{t_0}^{+\infty} \beta'(s)\varphi(\phi(s), s) \, ds,
\end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\beta(t) := \alpha(t)\sqrt{1 + \phi'^2(t)} = \bar{b} - \int_{t_0}^t \left([f'(u)v](s) - \phi'(s)[v](s) \right) \, ds.$$

On en déduit

$$(\alpha(t)\delta_{\Sigma})_t + (f'(u)\alpha(t)\delta_{\Sigma})_x = \beta(t_0)\varphi(0, t_0) + \beta'(t) \left(\sqrt{1 + \phi'^2(t)} \right)^{-1} \delta_{\Sigma}, \quad (1.21)$$

dans $\mathcal{M}_{loc}([0, +\infty[\times]0, +\infty[)$. Comme

$$\beta'(t) = -\left([f'(u)v](t) - \phi'(t)[v](t)\right)$$

et $\beta(t_0) = \bar{b}$, de (1.20) et (1.21) on conclut que la mesure $\mu = \tilde{v} + \alpha(t)\delta_\Sigma$ vérifie l'équation $\mu_t + (f'(u)\mu)_x = 0$ dans $\mathcal{M}_{loc}([0, +\infty[\times]0, +\infty[)$, et la formulation faible (1.19), pour toute fonction $\varphi \in C_0^1([0, +\infty[\times]0, +\infty[)$ vérifiant les hypothèses de l'énoncé. Maintenant, comme on a

$$\begin{aligned} \langle \alpha(t)\delta_\Sigma, \varphi \rangle &= \int_{t_0}^{+\infty} \varphi(\phi(t), t) \alpha(t) \sqrt{1 + \phi'^2(t)} dt \\ &= \int_{t_0}^{+\infty} \langle \alpha(t) \sqrt{1 + \phi'^2(t)} \delta_{x=\phi(t)}, \varphi(\cdot, t) \rangle dt, \end{aligned}$$

si l'on pose $m = \alpha(t)\delta_\Sigma$ et $m(t) = \alpha(t) \sqrt{1 + \phi'^2(t)} \delta_{\phi(t)}$, avec l'identification

$$\langle m, \varphi \rangle = \int_{t_0}^{+\infty} \langle m(t), \varphi(\cdot, t) \rangle dt,$$

pour $\varphi \in C_0([0, +\infty[\times]0, +\infty[)$, on conclut que la partie mesure de la solution $\mu = \tilde{v} + \alpha(t)\delta_\Sigma$ appartient à l'espace $C([0, T[; \mathcal{M}(\mathbb{R}))$. \square

Remarque 1.2.

Comme la fonction $[f'(u)v] - \phi'(t)[v]$ est une fonction régulière de t mais a priori non nulle, la fonction \tilde{v} n'est pas, en général, une solution faible de l'équation $v_t + (f'(u)v)_x = 0$ dans $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$.

Remarque 1.3.

Puisque l'on a supposé ϕ inversible, on peut montrer, de la même manière, que la solution mesure donnée par le théorème ci-dessus appartient à l'espace $C([0, +\infty[; \mathcal{M}([0, T]))$, pour tout $T > 0$. En effet, si l'on effectue un changement de variables $x = \phi(t)$, on a

$$\begin{aligned} \langle \alpha(t)\delta_\Sigma, \varphi \rangle &= \int_{t_0}^{+\infty} \alpha(t) \varphi(\phi(t), t) \sqrt{1 + \phi'(t)^2} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \alpha(\phi^{-1}(x)) \varphi(x, \phi^{-1}(x)) \sqrt{\frac{1}{\phi'(\phi^{-1}(x))^2} + 1} dx, \end{aligned}$$

d'où l'on conclut que

$$\langle \alpha(t)\delta_\Sigma, \varphi \rangle = \int_0^{+\infty} \langle \alpha(\phi^{-1}(x)) \sqrt{\frac{1}{\phi'(\phi^{-1}(x))^2} + 1} \delta_{t=\phi^{-1}(x)}, \varphi(x, \cdot) \rangle dx$$

et on peut alors identifier la mesure $\alpha(t)\delta_\Sigma$ à l'élément $m(x) \in C([0, +\infty[; \mathcal{M}([0, T]))$, $\forall T > 0$, défini par

$$m(x) = \alpha(\phi^{-1}(x)) \sqrt{\frac{1}{\phi'(\phi^{-1}(x))^2} + 1} \delta_{\phi^{-1}(x)}.$$

On a

$$m(0) = \alpha(t_0) \sqrt{\frac{1}{\phi'(t_0)^2} + 1} \delta_{t_0} = \frac{\bar{b}}{\phi'(t_0)}.$$

1.2.2 Le développement formel de u_ε autour de u dans le cas de l'équation de Burgers

On considère ici une perturbation de la condition aux limites a pour le problème mixte non linéaire de la forme

$$a_\varepsilon = a + \varepsilon b_\varepsilon.$$

Dans ce paragraphe, nous exhibons, dans un cadre simple, un exemple pour lequel le développement formel de la solution perturbée sous la forme

$$u_\varepsilon = u + \varepsilon v_\varepsilon \tag{1.22}$$

a un sens, et pour lequel on retrouve que la fonction

$$v = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v_\varepsilon \tag{1.23}$$

est bien la solution du problème linéarisé (1.10), avec $b = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} b_\varepsilon$, en calculant directement la limite (1.23) au sens des mesures. On suppose ainsi que la solution de base u est un choc et, pour faciliter les calculs, que f est donnée par $f(u) = \frac{u^2}{2}$, de sorte que $f'(u) = u$ (nous considérons donc le problème mixte pour l'équation de Burgers). On remarque toutefois que la procédure que l'on va mettre en place est valable pour un flux f convexe quelconque.

Dans le contexte du paragraphe précédent, on se donne une condition aux limites pour l'équation scalaire (1.1),

$$a = \begin{cases} a^+, & t > t_0, \\ a^-, & t < t_0, \end{cases}$$

avec $a^+ > a^- > 0$, et on suppose $u_0 = a^-$, pour simplifier, de sorte que la solution u du problème aux limites (1.2)-(1.6) est le choc

$$u(x, t) = \begin{cases} a^+, & x < \sigma(t - t_0), \\ a^-, & x > \sigma(t - t_0), \end{cases}$$

où $\sigma = \frac{f(a^+) - f(a^-)}{a^+ - a^-} = \frac{a^+ + a^-}{2}$.

On considère une perturbation de la condition aux limites a de la forme

$$a_\varepsilon = a + \varepsilon b_\varepsilon = \begin{cases} a^+ + \varepsilon b^+, & t > t_0 + \varepsilon, \\ a^- + \varepsilon b^-, & t < t_0 + \varepsilon, \end{cases}$$

(on a donc perturbé la position initiale de la discontinuité). Nous allons montrer, d'une part, que la solution u_ε du problème mixte de condition aux limites a_ε peut se développer sous la forme (1.22) et, d'autre part, que la fonction v obtenue par la limite (1.23) est bien la solution mesurée donnée par le théorème 1.2 pour le problème (1.10), de condition aux limites

$$b = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} b_\varepsilon = (a^+ - a^-) \delta_{t=t_0} + \begin{cases} b^+, & t > t_0, \\ b^-, & t < t_0. \end{cases}$$

La solution u_ε du problème mixte pour (1.2), de condition aux limites a_ε , est donnée par

$$u_\varepsilon(x, t) = \begin{cases} a^+ + \varepsilon b^+, & x < \sigma_\varepsilon(t - t_0 - \varepsilon), \\ a^- + \varepsilon b^-, & x > \sigma_\varepsilon(t - t_0 - \varepsilon), \end{cases}$$

avec $\sigma_\varepsilon = \frac{a^+ + \varepsilon b^+ + a^- + \varepsilon b^-}{2} = \sigma + \varepsilon \frac{b^+ + b^-}{2}$. On voit alors que l'on peut écrire u_ε sous la forme (1.22), avec

$$v_\varepsilon = \begin{cases} b^+, & t > t_0 + \varepsilon + \frac{x}{\sigma_\varepsilon}, \\ \frac{a^- - a^+}{\varepsilon} + b^-, & t_0 + \frac{x}{\sigma} < t < t_0 + \varepsilon + \frac{x}{\sigma_\varepsilon}, \\ b^-, & t < t_0 + \frac{x}{\sigma}. \end{cases}$$

Nous allons ensuite calculer $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v_\varepsilon$ au sens des mesures, dans $\mathcal{M}_{loc}([0, +\infty[\times [0, +\infty[)$.

Il est clair que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v_\varepsilon = \tilde{v} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{a^- - a^+}{\varepsilon} \chi_{t_0 + \frac{x}{\sigma} < t < t_0 + \varepsilon + \frac{x}{\sigma_\varepsilon}},$$

où

$$\tilde{v}(x, t) = \begin{cases} b^+, & t > t_0 + \frac{x}{\sigma}, \\ b^-, & t < t_0 + \frac{x}{\sigma}, \end{cases}$$

et $\chi_{t_0 + \frac{x}{\sigma} < t < t_0 + \varepsilon + \frac{x}{\sigma_\varepsilon}}$ est la fonction caractéristique de l'ensemble

$$\left\{ (x, t) : t_0 + \frac{x}{\sigma} < t < t_0 + \varepsilon + \frac{x}{\sigma_\varepsilon} \right\}.$$

Or, pour $\varphi \in C_0([0, +\infty[\times [0, +\infty[)$ on a

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{a^- - a^+}{\varepsilon} \chi_{t_0 + \frac{x}{\sigma} < t < t_0 + \varepsilon + \frac{x}{\sigma_\varepsilon}}(x, t) \varphi(x, t) \, dx dt \\ &= \int_{t_0}^{t_0 + \varepsilon} \int_0^{\sigma(t-t_0)} \frac{a^- - a^+}{\varepsilon} \varphi(x, t) \, dx dt + \int_{t_0 + \varepsilon}^{+\infty} \int_{\sigma_\varepsilon(t-t_0-\varepsilon)}^{\sigma(t-t_0)} \frac{a^- - a^+}{\varepsilon} \varphi(x, t) \, dx dt. \end{aligned}$$

La première des deux intégrales ci-dessus tend vers 0, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} & \int_{t_0 + \varepsilon}^{+\infty} \int_{\sigma_\varepsilon(t-t_0-\varepsilon)}^{\sigma(t-t_0)} \frac{a^- - a^+}{\varepsilon} \varphi(x, t) \, dx dt \\ &= \int_{t_0 + \varepsilon}^{+\infty} \int_{\sigma(t-t_0)-\varepsilon}^{\sigma(t-t_0)} \frac{a^- - a^+}{\varepsilon} \varphi(x, t) \, dx dt \\ &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{t_0}^{+\infty} (a^- - a^+) \left(\sigma - \frac{b^+ + b^-}{2}(t - t_0) \right) \varphi(\sigma(t - t_0), t) \, dt \end{aligned}$$

et on obtient

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{a^- - a^+}{\varepsilon} \chi_{t_0 + \frac{x}{\sigma} < t < t_0 + \varepsilon + \frac{x}{\sigma_\varepsilon}} = (a^- - a^+) \left(\sigma - \frac{b^+ + b^-}{2}(t - t_0) \right) \left(\sqrt{1 + \sigma^2} \right)^{-1} \delta_\Sigma,$$

où Σ désigne ici la courbe $\{(\sigma(t-t_0), t) : t \geq t_0\}$. On remarque maintenant que, d'une part on a

$$\begin{aligned} & -(a^- - a^+) \left(\frac{b^+ + b^-}{2} (t - t_0) \right) \\ & = -(t - t_0) ([f'(u)\tilde{v}](t) - \sigma[\tilde{v}](t)) = - \int_{t_0}^t ([f'(u)\tilde{v}](s) - \sigma[\tilde{v}](s)) ds, \end{aligned}$$

et, d'autre part,

$$\begin{aligned} \langle (a^- - a^+) \sigma(\sqrt{1 + \sigma^2})^{-1} \delta_{\Sigma}, \varphi \rangle &= \int_{t_0}^{+\infty} (a^- - a^+) \sigma \varphi(\sigma(t - t_0), t) \\ &= \int_0^{+\infty} (a^- - a^+) \varphi\left(x, \frac{x}{\sigma} + t_0\right) dx \\ &= \int_0^{+\infty} (a^- - a^+) \langle \delta_{t=\frac{x}{\sigma}+t_0}, \varphi(x, \cdot) \rangle dx, \end{aligned}$$

d'où l'on peut conclure que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v_\varepsilon$ est bien la solution mesure donnée par le théorème (1.2), qui correspond, en $x = 0$, à la mesure $(a^- - a^+) \delta_{t_0}$.

1.2.3 La linéarisation de la condition d'entropie (1.6) et la condition aux limites pour le problème linéarisé dans le cas f convexe

Dans ce paragraphe nous nous restreindrons au cas où le flux f est une fonction convexe. Nous voulons montrer que, dans ce cas, la linéarisation de la condition aux limites (1.6) pour le problème de base conduit à une formulation de la condition aux limites pour le problème linéarisé qui est cohérente avec la formulation classique pour une équation de transport linéaire, au moins si l'on suppose la solution de base u telle que la frontière $x = 0$ n'est pas caractéristique. Nous nous plaçons désormais dans le cadre d'une solution de base u générale telle que sa trace $u(0, t)$ en $x = 0$ vérifie les conditions suivantes :

C1. $f'(u(0, t)) \neq 0$.

C2. $f'(u(0, t)) \neq \overline{a(t)}$, si $a(t) > 0$.

Les conditions ci-dessus signifient que la frontière $x = 0$ n'est pas caractéristique. Si la solution de base u est une raréfaction, C1 est équivalent à la condition $u(0, t) = a(t)$, avec a positif. Si la solution de base est un choc, C2 signifie que la discontinuité ne recoupe pas la frontière $x = 0$ (rappelons que $f(a(t)) - f(\overline{a(t)}) = 0$).

On suppose que

$$a_\varepsilon(t) = a(t) + \varepsilon b_\varepsilon(t)$$

(avec b_ε une suite de fonctions uniformément bornées dans L^∞) est une perturbation de la condition aux limites a et que la solution u_ε du problème perturbé peut s'écrire sous la forme

$$u_\varepsilon = u + \varepsilon v_\varepsilon.$$

On suppose aussi que, pour presque tout $t > 0$, il existe $\varepsilon' > 0$ tel que la suite de fonctions $(v_\varepsilon(0, t))_{\varepsilon < \varepsilon'}$ est uniformément bornée dans L^∞ , et que les suites de fonctions

$v_\varepsilon(0, t)$ et $b_\varepsilon(t)$ convergent, dans un espace qui entraîne la convergence p.p, vers des fonction $v(0, t)$ et $b(t)$ respectivement.

Nous voulons montrer que, la solution de base u vérifiant la condition aux limites (1.6), ou de manière équivalente, puisque f est convexe, la condition (1.9), si $u_\varepsilon(0, t) = u(0, t) + \varepsilon v_\varepsilon(0, t)$ vérifie la même condition relativement à la donnée $a_\varepsilon(t) = a(t) + \varepsilon b_\varepsilon(t)$, alors la fonction $v = \lim_{\varepsilon} v_\varepsilon$ vérifie la condition aux limites $v(0, t) = b(t)$ au sens classique des équations de transport linéaires.

Autrement dit nous voulons montrer que, pour chaque $t > 0$, la condition

$$\begin{cases} \frac{f(u(0, t)) - f(k)}{u(0, t) - k} \leq 0, \quad \forall k \in I(u(0, t), a(t)), \\ \frac{f(u_\varepsilon(0, t)) - f(k)}{u_\varepsilon(0, t) - k} \leq 0, \quad \forall k \in I(u_\varepsilon(0, t), a_\varepsilon(t)), \end{cases}$$

implique la condition

$$v(0, t) = b(t),$$

si $f'(u(0, t)) > 0$, et n'impose aucune restriction sur $v(0, t)$ si $f'(u(0, t)) < 0$.

Le cas $f'(u(0, t)) > 0$

Supposons d'abord que $u(0, t)$ est tel que $f'(u(0, t)) > 0$. On commence par observer que, f étant convexe, en vertu de la condition (1.6) on a

$$f'(u(0, t)) > 0 \implies u(0, t) = a(t).$$

Comme

$$f'(u_\varepsilon(0, t)) = f'(u(0, t) + \varepsilon v_\varepsilon(0, t)) > 0$$

pour ε suffisamment petit, alors on doit avoir $u_\varepsilon(0, t) = a_\varepsilon(t)$ et donc, puisque $u(0, t) = a(t)$, aussi avoir $v_\varepsilon(0, t) = b_\varepsilon(t)$. On en déduit $v(0, t) = b(t)$.

Le cas $f'(u(0, t)) < 0$

Supposons maintenant que $f'(u(0, t)) < 0$. Nous avons trois cas à distinguer :

1. $a(t) < u^*$. Dans ce cas, on a $a + \varepsilon b_\varepsilon < u^*$ et $f'(u(0, t) + \varepsilon v_\varepsilon(0, t)) < 0$, pour ε suffisamment petit, indépendamment de la valeur de $v_\varepsilon(0, t)$. On conclut alors dans ce cas que la vérification ou non de la condition (1.9) ne dépend pas de la valeur de $v_\varepsilon(0, t)$, d'où l'on peut conclure que $v(0, t)$ peut prendre une valeur arbitraire.
2. $a(t) > u^*$. Comme on suppose la condition C2, on a alors $u(0, t) < \overline{a(t)}$ et donc, encore une fois pour ε petit, $u(0, t) + \varepsilon v_\varepsilon(0, t) < \overline{a(t) + \varepsilon b_\varepsilon(t)}$, dû à la continuité de la fonction $a \mapsto \overline{a}$, indépendamment de la valeur de $v_\varepsilon(0, t)$. La condition (1.9) est à nouveau vérifiée indépendamment de la valeur de $v_\varepsilon(0, t)$, d'où l'on peut conclure encore une fois que $v(0, t)$ peut prendre une valeur arbitraire.
3. $a(t) = u^*$. Comme on suppose C1 et C2, on a $u(0, t) < u^*$ et donc il existe $c < u^*$ tel que $u(0, t) < c < \overline{a(t) + \varepsilon b_\varepsilon(t)}$, pour tout ε suffisamment petit (remarquons que

$$\overline{a(t) + \varepsilon b_\varepsilon(t)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{a(t)} = u^*.$$

On peut alors conclure que $u(0, t) + \varepsilon v_\varepsilon(0, t) < c < \overline{a(t) + \varepsilon b_\varepsilon(t)}$, pour ε suffisamment petit, indépendamment de la valeur de $v_\varepsilon(0, t)$ et on en déduit encore une fois que (1.9) est vérifiée indépendamment de la valeur $v_\varepsilon(0, t)$ et que $v(0, t)$ peut donc prendre une valeur arbitraire.

Ce raisonnement montre alors que, dans le cas où la fonction flux est convexe et sous les hypothèses C1 et C2, la linéarisation de la condition aux limites (1.6) pour $u_\varepsilon(0, t)$ conduit à une formulation de la condition aux limites pour la fonction v qui est celle donnée par la théorie des équations de transport linéaires.

L'approximation numérique

Dans ce deuxième chapitre nous nous intéressons à l'approche numérique du problème (1.10) par un schéma de Roe linéarisé. Dans le cas où la solution de base u présente des discontinuités de saut, on s'attend à ce que la solution numérique du problème linéarisé approche une mesure de Dirac dont le support est constitué par les courbes de discontinuité de u . Nous allons exhiber quelques tests numériques qui corroborent les résultats du chapitre précédent, dans le cas concret de l'équation de Burgers.

2.1 Discrétisation par un schéma de Roe linéarisé

Nous définissons un maillage uniforme de $[0, +\infty[\times [0, +\infty[$, de pas d'espace Δx et pas de temps Δt , dont les mailles sont les cellules $[x_j, x_{j+1}[\times [t^n, t^{n+1}[$, avec $x_j = j\Delta x$, $j \in \mathbb{Z}$, $j \geq 0$, et $t^n = n\Delta t$, $n \in \mathbb{N}$. On pose $\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$ et on note encore

$$x_{j+\frac{1}{2}} = \left(j + \frac{1}{2}\right)\Delta x.$$

Discrétisation de la donnée initiale et de la donnée aux limites.

La condition initiale discrète pour u et pour v est définie respectivement par la moyenne de u_0 et de v_0 dans les intervalles $[x_j, x_{j+1}[$: pour $j \in \mathbb{Z}$, $j \geq 0$, on pose

$$\begin{aligned} u_{j+\frac{1}{2}}^0 &= \frac{1}{\Delta x} \int_{x_j}^{x_{j+1}} u_0(x) dx, \\ v_{j+\frac{1}{2}}^0 &= \frac{1}{\Delta x} \int_{x_j}^{x_{j+1}} v_0(x) dx, \end{aligned}$$

pour $j \in \mathbb{Z}$, $j \geq 0$. On définit de manière analogue la condition aux limites discrète comme une moyenne de a et de b dans les intervalles $[t^n, t^{n+1}[$:

$$\begin{aligned} a^n &= \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} a(t) dt, \\ b^n &= \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} b(t) dt, \end{aligned}$$

pour $n \in \mathbb{N}$.

On supposera dans la suite la condition de Courant-Friedrichs-Levy (CFL) :

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max \left\{ \sup_{x \geq 0} |f'(u_0(x))|, \sup_{t \geq 0} |f'(a(t))| \right\} \leq 1. \quad (2.1)$$

Évolution en temps.

On considère le schéma de Roe classique pour approcher les solutions du problème mixte (1.2)-(1.6) et une version linéarisée de celui-ci pour approcher les solutions du problème linéarisé (1.10).

On considère la fonction $A(u, v)$ définie par

$$\begin{cases} A(u, v) = \frac{f(v) - f(u)}{v - u}, & \text{si } v \neq u, \\ A(u, u) = f'(u), \end{cases}$$

et on pose, pour chaque $j \geq 1$, $n \geq 0$,

$$\begin{aligned} A_j^n &= A(u_{j-\frac{1}{2}}^n, u_{j+\frac{1}{2}}^n), \\ A_j^{+n} &= \frac{1}{2} (A_j^n + |A_j^n|), \quad A_j^{-n} = \frac{1}{2} (A_j^n - |A_j^n|), \\ \Delta u_j^n &= u_{j+\frac{1}{2}}^n - u_{j-\frac{1}{2}}^n \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} A_0^n &= A(a^n, u_{\frac{1}{2}}^n), \\ A_0^{+n} &= \frac{1}{2} (A_0^n + |A_0^n|), \quad A_0^{-n} = \frac{1}{2} (A_0^n - |A_0^n|), \\ \Delta u_0^n &= u_{\frac{1}{2}}^n - a^n. \end{aligned}$$

Le schéma de Roe s'écrit

$$u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} = u_{j+\frac{1}{2}}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (A_{j+1}^{-n} \Delta u_{j+1}^n + A_j^{+n} \Delta u_j^n), \quad j \geq 0. \quad (2.2)$$

On peut aussi l'écrire sous la forme conservative

$$u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} = u_{j+\frac{1}{2}}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (g_{j+1}^n - g_j^n),$$

$g_j^n = g(u_{j-\frac{1}{2}}^n, u_{j+\frac{1}{2}}^n)$, pour $j \geq 0$ (si on pose $u_{-\frac{1}{2}}^n = a^n$), où g est le flux numérique, défini par

$$g(u, v) = \frac{f(u) + f(v)}{2} - |A(u, v)|(v - u).$$

On peut encore considérer sa forme entropique

$$u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} = u_{j+\frac{1}{2}}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{f(u_{j+\frac{3}{2}}^n) - f(u_{j-\frac{1}{2}}^n)}{2} + \frac{Q_{j+1}^n \Delta u_{j+1}^n - Q_j^n \Delta u_j^n}{2}, \quad (2.3)$$

où le coefficient numérique de viscosité Q_j^n est donné par

$$Q_j^n = \frac{\Delta t}{\Delta x} |A_j^n|.$$

Il est bien connu que ce schéma peut produire des solutions non entropiques si l'on est proche de l'état sonique u^* . On peut alors considérer au lieu de (2.2), le schéma de Roe avec modification entropique, donné par (2.3) avec le coefficient de viscosité défini comme suit :

$$Q_j^n = \begin{cases} \frac{\Delta t}{\Delta x} |A_j^n|, & \text{si } |A_j^n| \geq \delta_j^n, \\ \frac{\Delta t}{\Delta x} |\delta_j^n|, & \text{si } |A_j^n| < \delta_j^n, \end{cases}$$

où

$$\delta_j^n = \sup_{u \in [u_{j-\frac{1}{2}}^n, u_{j+\frac{1}{2}}^n]} \max \left\{ 0, A(u, u_{j+\frac{1}{2}}^n) - A(u_{j-\frac{1}{2}}^n, u_{j+\frac{1}{2}}^n), A(u_{j-\frac{1}{2}}^n, u_{j+\frac{1}{2}}^n) - A(u_{j-\frac{1}{2}}^n, u) \right\}.$$

Pour d'autres détails concernant le schéma de Roe et sa convergence, nous référons les ouvrages [GR91] et [LeV02].

Pour approcher les solutions du problème linéarisé (1.10), nous allons considérer le schéma proposé par Godlewski, Olazabal et Raviart dans [GOR98] et [GOR99], qui correspond à une linéarisation du schéma de Roe défini précédemment. La solution discrète $v_{j+\frac{1}{2}}^n$ est définie par

$$v_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} = v_{j+\frac{1}{2}}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(A_{j+1}^{-n} \Delta v_{j+1}^n + A_j^{+n} \Delta v_j^n + (A_{j+1}^n - A_j^n) v_{j+\frac{1}{2}}^n \right).$$

Remarquons que ce schéma correspond à une discrétisation de type *upwind* de l'équation (1.13).

2.2 Résultats obtenus dans le cas de l'équation de Burgers

On se place dans le cadre concret de l'équation de Burgers, c'est-à-dire

$$f(u) = \frac{u^2}{2}.$$

Nous présentons ici les résultats obtenus après avoir mis en oeuvre le schéma décrit au paragraphe précédent pour un problème de type problème de Riemann, i. e. avec des données initiales u_0 et v_0 , respectivement pour le problème non linéaire et pour le problème linéarisé, et des conditions aux limites a et b constantes. On rappelle que dans ce cas, comme le montrent les résultats de Dubois et LeFloch déjà cités ([DL88]), la solution du problème mixte (1.2)-(1.6) n'est autre que la restriction à $[0, +\infty[\times [0, +\infty[$ de la solution du problème de Riemann pour l'équation (1.1), de donnée initiale

$$\begin{cases} a, & x < 0, \\ u_0, & x > 0. \end{cases}$$

Dans le cas concret de l'équation de Burgers, la solution de ce problème de Riemann est un choc séparant a et u_0 , qui se propage à vitesse $\sigma = \frac{a+u_0}{2}$, si $a > u_0$, ou une raréfaction reliant a et u_0 , si $a < u_0$.

Nous avons effectué des tests numériques dans les quatre situations suivantes :

1. $u_0 < a$, $a > 0$ et $\frac{u_0+a}{2} > 0$. La solution de base est un choc de vitesse strictement positive.
2. $0 < a < u_0$. La solution de base est une raréfaction reliant les états a et u_0 .
3. $a \leq 0$, $u_0 > 0$. La solution de base est une raréfaction, pour laquelle on a $f'(u(0, t)) = 0$.
4. $a > 0$, $u_0 = \bar{a} = -a$. La solution de base est un choc dont la discontinuité se place sur la frontière $x = 0$.

On remarque que, dans le cas 3, si $a = 0$, et dans le cas 4, la solution de base ne vérifie pas les conditions C1 et C2 du paragraphe 1.2.3.

Le domaine spatial que nous avons choisi dans tous les exemples est l'intervalle $[0, 1]$ et le temps t est tel que l'onde n'a pas atteint le bord $x = 1$.

Cas 1 : la solution de base est un choc de vitesse strictement positive.

La solution de base est le choc

$$u(x, t) = \begin{cases} a, & x < \sigma t, \\ u_0, & x > \sigma t, \end{cases}$$

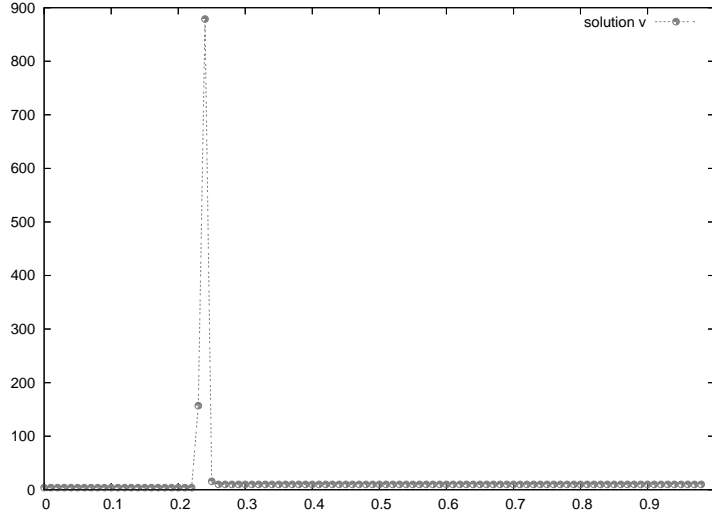
qui se propage à la vitesse $\sigma = \frac{u_0+a}{2} > 0$. La solution du problème linéarisé est donnée par le théorème 1.2 et vaut

$$\tilde{v} + \frac{u_0 - a}{2} b t \delta_{x=\sigma t},$$

avec

$$\tilde{v} = \begin{cases} b, & x < \sigma t, \\ 0, & x > \sigma t. \end{cases}$$

Numériquement, comme l'on peut constater dans la figure 2.2, les résultats obtenus correspondent aux résultats prédits par la théorie. On a considéré pour le problème non linéaire les données $u_0 = -1$ et $a = 2$ et, pour le problème linéarisé, $v_0 = 10$ et $b = 1$. La solution du problème linéarisé est alors une mesure concentrée sur la courbe $x = \frac{1}{2}t$. Les résultats présentés correspondent à une CFL de 0,5.

FIG. 2.1 – Solution linéarisée au temps $t = 0,5$.

Cas 2 : la solution de base est une raréfaction dont le bord de gauche se déplace à une vitesse strictement positive

La solution de base est la raréfaction

$$u(x, t) = \begin{cases} a, & \frac{x}{t} \leq a, \\ \frac{x}{t}, & a \leq \frac{x}{t} \leq u_0, \\ u_0, & \frac{x}{t} \geq u_0. \end{cases}$$

On commence par étudier le problème mixte linéarisé quand la solution de base u est comme ci-dessus. On se propose de chercher une solution du problème (1.10) dans la classe des solutions auto-semblables. Soit $v(\frac{x}{t})$ une telle solution. Alors, pour (x, t) tel que $\frac{x}{t} < a$, v vérifie la loi de conservation linéaire

$$v_t + av_x = 0.$$

On en déduit $v(\frac{x}{t}) = b$, si $\frac{x}{t} < a$. De la même façon, on obtient $v(\frac{x}{t}) = v_0$, pour (x, t) tel que $\frac{x}{t} > u_0$. Maintenant, dans l'ensemble $\{(x, t) : a < \frac{x}{t} < u_0\}$, v vérifie l'équation

$$v_t + \left(\frac{x}{t}v\right)_x = 0,$$

soit, si l'on note $\xi = \frac{x}{t}$,

$$-\frac{\xi}{t}v'(\xi) + \frac{1}{t}v + \frac{\xi}{t}v'(\xi) = 0,$$

autrement dit,

$$\frac{1}{t}v = 0,$$

d'où l'on peut conclure que $v(\frac{x}{t}) = 0$, pour tout (x, t) tel que $a < \frac{x}{t} < u_0$. La solution du problème linéarisé est alors donnée par

$$v(x, t) = \begin{cases} b, & \frac{x}{t} \leq a, \\ 0, & a \leq \frac{x}{t} \leq u_0, \\ v_0, & \frac{x}{t} \geq u_0. \end{cases}$$

Nous présentons les résultats numériques obtenus pour les données $a = 1$, $u_0 = 2$, $b = 4$ et $v_0 = 10$. On a considéré à nouveau une CFL de 0,5.

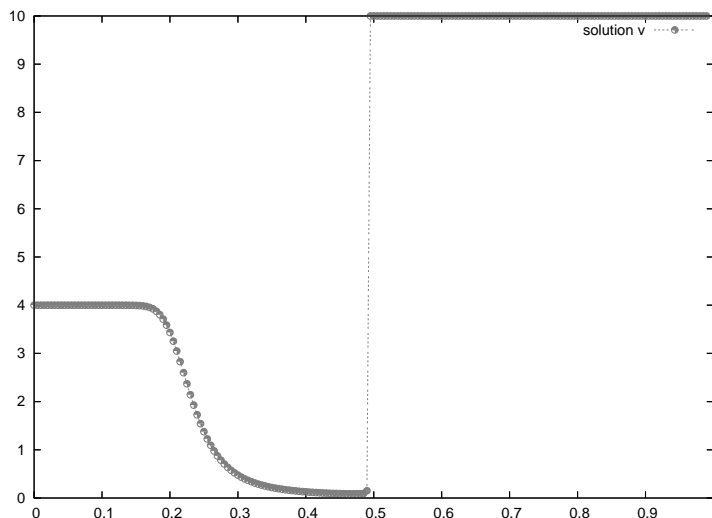


FIG. 2.2 – Solution linéarisée au temps $t = 0,25$.

Cas 3 : la solution de base est une raréfaction sonique

Dans ce cas, la solution de base et la solution du problème linéarisé sont respectivement les fonctions

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{x}{t}, & 0 \leq \frac{x}{t} \leq u_0, \\ u_0, & \frac{x}{t} \geq u_0, \end{cases} \quad v(x, t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \frac{x}{t} \leq u_0, \\ v_0, & \frac{x}{t} \geq u_0. \end{cases}$$

Nous présentons les résultats numériques obtenus avec les mêmes valeurs pour les données u_0 , b et v_0 que dans le cas précédent et pour les valeurs $a = -1$ et $a = 0$.

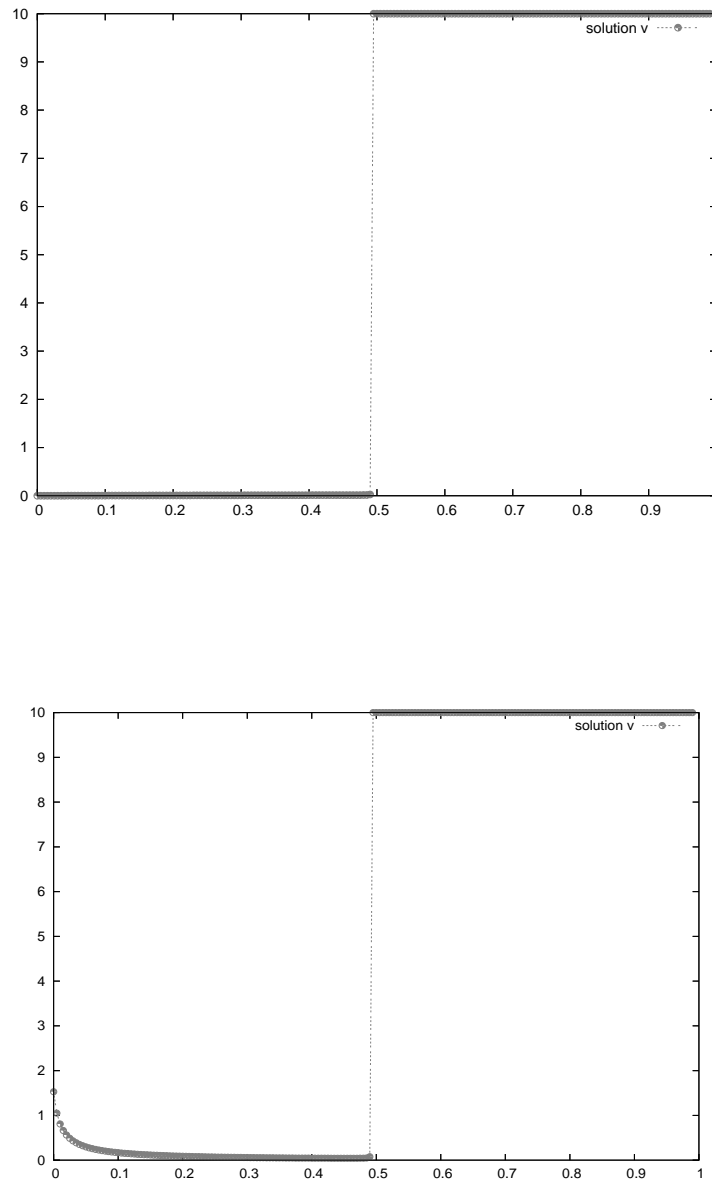


FIG. 2.3 – Solution linéarisée au temps $t = 0,5$, avec $a = -1$ (figure en haut) et $a = 0$ (figure en bas).

Cas 4 : la solution de base est un choc stationnaire

La solution de base est maintenant un choc stationnaire et la discontinuité se place donc sur la frontière $x = 0$. L'hypothèse C2 n'est donc pas vérifiée. Comme l'on peut vérifier dans la figure ci-dessus, on aperçoit numériquement une mesure de Dirac qui s'est formé sur la droite $x = 0$. Bien que nous n'ayons pas considéré ce cas au chapitre précédent, ce résultat n'était pas inattendu.

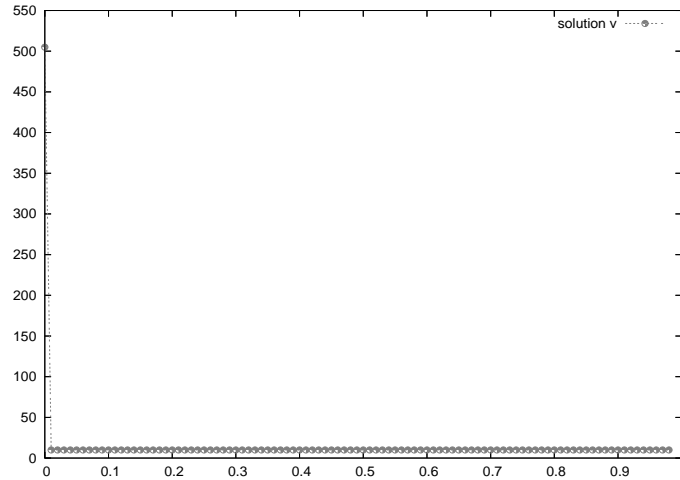


FIG. 2.4 – Solution linéarisée au temps $t = 0,5$, correspondant au cas où la solution de base est un choc stationnaire.

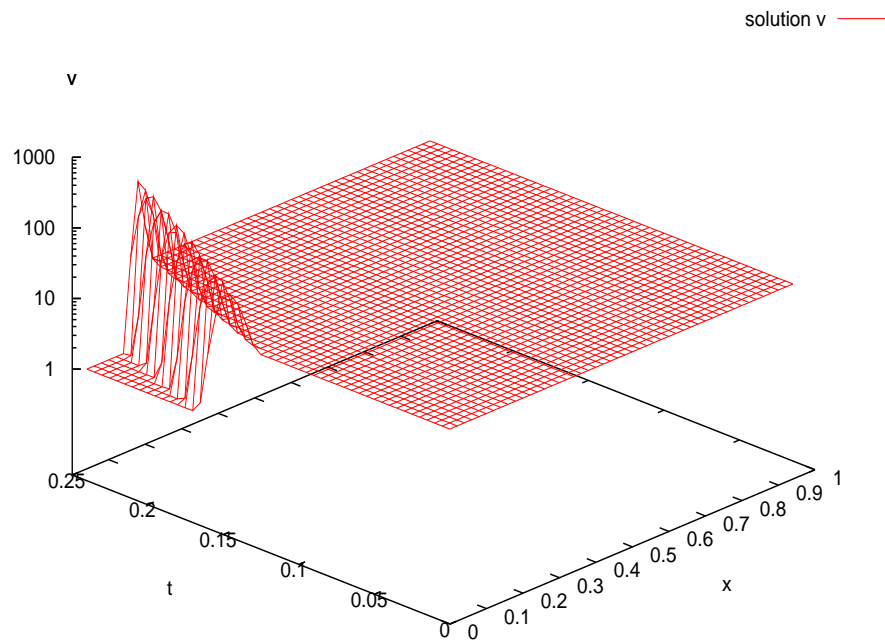


FIG. 2.5 – Le cas d'une discontinuité initiale en $t_0 = 0,125$. Représentation de la solution linéarisée dans l'ensemble $[0, 1] \times [0, 0,25]$.

Deuxième partie

Lois de conservation scalaires : approximation par relaxation et couplage

Introduction

La relaxation intervient dans divers phénomènes physiques : théorie cinétique des gaz, gaz hors équilibre thermique, élasticité avec mémoire, écoulements multiphasiques, transitions de phase, etc. De façon simplifiée, les systèmes de relaxation décrivent la propriété qu'ont les systèmes physiques de retrouver leur état d'équilibre quand celui-ci est perturbé. Du point de vue mathématique, un des travaux pionniers sur ce genre de système est celui de G. Q. Chen, C. D. Levermore et T. P. Liu [CLL94]. Les systèmes de relaxation prennent la forme

$$\frac{\partial U_\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F(U_\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} R(U_\varepsilon), \quad (1)$$

où $U_\varepsilon = U_\varepsilon(x, t)$ prend ses valeurs dans un ouvert Ω de \mathbb{R}^N , pour $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$. Le paramètre $\varepsilon > 0$ représente un temps de relaxation qui est censé être très petit et R est le terme de relaxation, qui dépend seulement des valeurs de U_ε . On considère le cadre défini par ces auteurs : au système (1) est associée une matrice \mathcal{Q} de dimension $n \times N$ ($n < N$) de rang n telle que $\mathcal{Q}R(U) = 0$ pour tout U dans Ω . Les solutions du système (1) vérifient alors le système de n équations conservatives

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{Q}U_\varepsilon + \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{Q}F(U_\varepsilon) = 0.$$

On suppose que chaque $u \in \mathcal{Q}\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ détermine de façon unique une valeur d'équilibre $U = \mathcal{E}(u)$ qui vérifie $R(\mathcal{E}(u)) = 0$ et telle que $\mathcal{Q}\mathcal{E}(u) = u$. Si l'on introduit alors la relation de fermeture $U = \mathcal{E}(u)$, le système précédent se réduit au système de lois de conservation suivant dans les n variables $u = u_\varepsilon = \mathcal{Q}\mathcal{E}(u_\varepsilon)$:

$$\begin{cases} U = \mathcal{E}(u), \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0, \end{cases} \quad (2)$$

où $f(u) = \mathcal{Q}F(\mathcal{E}(u))$.

Le passage à la limite, quand le temps de relaxation ε tend vers 0, modélise la dynamique du passage du système dans un état hors équilibre à un état d'équilibre. On s'attend alors à ce que, à la limite, les solutions U_ε du système hors équilibre (1) convergent vers la solution à l'équilibre $U = \mathcal{E}(u)$ du système (2). Ce système décrit

l'état d'équilibre des solutions du système (1).

Dans notre travail, on s'intéresse à l'approximation de lois de conservation scalaires par une suite de systèmes hyperboliques semi-linéaires avec un terme de relaxation, donnés par

$$\begin{cases} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t} + a^2 \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} = \frac{1}{\varepsilon}(f(u_\varepsilon) - v_\varepsilon), \end{cases} \quad (3)$$

où $f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$, a est une constante positive et $0 < \varepsilon \ll 1$. Ce système a été introduit par S. Jin et Z. Xin dans [JX95] et il est bien un système du type (1). En effet, pour (3), on a

$$U_\varepsilon = \begin{pmatrix} u_\varepsilon \\ v_\varepsilon \end{pmatrix}, \quad F(U_\varepsilon) = \begin{pmatrix} v_\varepsilon \\ a^2 u_\varepsilon \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad R(U_\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 \\ f(u_\varepsilon) - v_\varepsilon \end{pmatrix}.$$

La matrice \mathcal{Q} est la matrice

$$\mathcal{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

et la relation d'équilibre est ici donnée par

$$U = \mathcal{E}(u) = (u, f(u)),$$

c'est-à-dire par $v = f(u)$. En faisant tendre ε vers 0, on espère donc que la limite (u, v) de la suite des solutions $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ de (3) vérifie $v = f(u)$, avec u solution de

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0. \quad (4)$$

Ceci est effectivement le cas, pourvu que l'on ait une certaine condition de stabilité, la *condition sous-caractéristique* ou *condition de Whitham* ([Whi74]). Cette condition prend la forme

$$-a < f'(u) < a, \quad \forall u,$$

et elle traduit le fait que les ondes du sur-système (3) doivent se propager à une vitesse plus grande que la vitesse caractéristique.

Dans le premier chapitre de cette deuxième partie, nous nous proposons d'étudier une discrétisation du système de relaxation (3). Du point de vue théorique, les solutions faibles régulières de systèmes de relaxation ont été étudiées dans [CLL94]. Dans le cas particulier du système (3), la convergence de ses solutions vers l'équilibre a été prouvée séparément par R. Natalini dans [Nat96] et par D. Serre dans [Ser00]. Le résultat de Serre est plus général, puisqu'il a été établi aussi pour la version vectorielle de (3), et fait usage d'une estimation de la norme L^∞ de la suite des solutions approchées, obtenue par l'existence de régions invariantes, et de résultats de compacité par compensation. La preuve de Natalini est basée dans des estimations de la norme BV des suites approchées. En ce qui concerne l'approximation numérique des solutions de (3), D. Aregba-Driollet et R. Natalini dans [AN96] et C. Lattanzio et D. Serre dans [LS01] ont proposé une discrétisation pour (3), et prouvé la convergence des solutions

approchées vers une solution de (3), lorsque le pas de temps tend vers 0, et vers la solution entropique de (4), lorsque le temps de relaxation $\varepsilon \rightarrow 0$. Les méthodes utilisées sont à nouveau différentes, puisque Lattanzio et Serre ont recours ici aussi à la compacité par compensation. D'autre part, le terme source est lui aussi discrétisé de manière différente. Tandis que dans [AN96] on utilise une méthode de *splitting* et à chaque pas de temps, après actualisation de la partie convective, on résout exactement une équation différentielle ordinaire pour actualiser la partie non linéaire, dans [LS01] on propose une discrétisation implicite du terme source. On cite encore les travaux [AM04], [Mil03] et [NT01], qui traitent le problème aux limites pour une approximation du type (3).

Dans notre travail, nous nous proposons de prouver en part (puisque nous nous restreindrons au cas scalaire) les résultats de convergence obtenus par Lattanzio et Serre par une autre technique, basée sur une estimation des normes L^∞ et BV des solutions approchées. Ce premier chapitre est ainsi divisé en deux parties, la première concernant les résultats connus d'existence et d'unicité de solution régulière pour le système (3) et la deuxième concernant la discrétisation numérique et les résultats de convergence des solutions approchées que nous avons obtenus.

Du point de vue numérique, dans [JX95], Jin et Xin avaient mis en évidence l'intérêt de construire des schémas numériques basés sur l'approximation des lois de conservation par des systèmes de relaxation, puisque les systèmes de relaxation se comportant bien à la limite $\varepsilon = 0$ constituent, du point de vue numérique, un moyen d'approcher simplement un système de lois de conservation. Cette procédure permet notamment que l'on n'ait pas besoin d'écrire un solveur de Riemann pour le terme non linéaire $f(u)$. On introduit alors parfois des termes de relaxation artificiels dans les systèmes homogènes, dans le but de résoudre, à chaque pas de temps, un système linéaire (ou linéairement dégénéré), ce qui au niveau discret est plus simple. Pour une équation scalaire ceci est peut être inutile mais pour les systèmes vectoriels cette procédure est usuelle.

Dans le troisième chapitre de cette deuxième partie, nous étudions dans un cadre simple le problème du couplage entre le modèle à l'équilibre, c'est-à-dire l'équation scalaire (4), et le modèle hors équilibre donné par le système (3), à une interface fixe placée en $x = 0$. Ce problème requiert de comprendre comment coupler les deux systèmes au niveau de l'interface. Pour ce faire, nous avons utilisé la définition du couplage par état, introduite par Godlewski et Raviart dans [GR04]. Nous abordons le sujet du couplage dans le deuxième chapitre, où l'on présente dans un contexte assez général, que l'on tiendra en compte aussi dans la prochaine partie de ce mémoire, les notions du couplage utilisées ici. Étant définie une solution du problème couplé, nous avons obtenu l'existence d'une telle solution dans le cas où l'on se restreint à une fonction flux strictement monotone, et nous avons pu montrer la convergence d'un schéma numérique couplé vers cette solution, dans le cas où $f' > 0$. Ceux ci restent des problèmes modèles, mais qui permettent toutefois d'avoir une idée sur le caractère bien ou mal posé de ce type de couplage.

Relaxation semi-linéaire de lois de Conservation

3.1 Le modèle de relaxation de Jin et Xin

Considérons le problème de Cauchy pour le système

$$\begin{cases} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t} + a^2 \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} = \frac{1}{\varepsilon} (f(u_\varepsilon) - v_\varepsilon), \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (3.1)$$

de donnée initiale

$$(u_\varepsilon, v_\varepsilon)(x, 0) = (u_0, v_0), \quad (3.2)$$

où a est une constante positive et $f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$. Si $v_0(x) = f(u_0(x))$, nous disons que la condition initiale est à l'équilibre.

Définition 3.1.

Soit $(u_0, v_0) \in L^\infty(\mathbb{R})^2$. Un couple $(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \in L^\infty(\mathbb{R} \times [0, +\infty[)^2$ est solution faible du problème de Cauchy (3.1)-(3.2) si, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty[)$, on a

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} u_\varepsilon \varphi_t + v_\varepsilon \varphi_x \, dx dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \varphi(x, 0) \, dx &= 0, \\ \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} v_\varepsilon \varphi_t + a^2 u_\varepsilon \varphi_x \, dx dt + \int_{\mathbb{R}} v_0(x) \varphi(x, 0) \, dx &= - \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\varepsilon} (f(u_\varepsilon) - v_\varepsilon) \varphi \, dx dt. \end{aligned}$$

Le but de cette section est de présenter un résultat d'existence et d'unicité de solution du problème de Cauchy (3.1)-(3.2). La méthode pour le faire est classique dans le contexte de la théorie des équations hyperboliques semi-linéaires mais nous avons choisi de faire ici la preuve de ce résultat, qui nous utiliserons dans le chapitre 5 de cette partie.

On effectue un changement de variables

$$(u, v) \longmapsto (w, z) = (v + au, v - au).$$

Les nouvelles variables w et z sont les invariants de Riemann pour (3.1). Puisque l'application ci-dessus est un difféomorphisme dont l'inverse est

$$(w, z) \longmapsto (u, v) = \left(\frac{w - z}{2a}, \frac{w + z}{2} \right),$$

le système (3.1) peut naturellement s'écrire sous la forme diagonale équivalente

$$\begin{cases} \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial t} + a \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x} = F(w_\varepsilon, z_\varepsilon), \\ \frac{\partial z_\varepsilon}{\partial t} - a \frac{\partial z_\varepsilon}{\partial x} = F(w_\varepsilon, z_\varepsilon), \end{cases} \quad (3.3)$$

où

$$F(w, z) = \frac{1}{\varepsilon} (f(u) - v) = \frac{1}{\varepsilon} \left(f\left(\frac{w - z}{2a}\right) - \frac{w + z}{2} \right).$$

Il est alors évident que $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ est une solution faible du problème de Cauchy (3.1)-(3.2) si et seulement si $(w_\varepsilon, z_\varepsilon) = (v_\varepsilon + au_\varepsilon, v_\varepsilon - au_\varepsilon)$ est une solution faible du problème de Cauchy pour le système (3.3), de donnée initiale

$$(w_0, z_0) = (v_0 + au_0, v_0 - au_0), \quad (3.4)$$

autrement dit, si et seulement si $(w_\varepsilon, z_\varepsilon)$ vérifie, pour toute fonction $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty[)$,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} w_\varepsilon (\varphi_t + a\varphi_x) dx dt + \int_{\mathbb{R}} w_0(x) \varphi(x, 0) dx &= - \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} F(w_\varepsilon, z_\varepsilon) \varphi dx dt, \\ \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} z_\varepsilon (\varphi_t - a\varphi_x) dx dt + \int_{\mathbb{R}} z_0(x) \varphi(x, 0) dx &= - \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} F(w_\varepsilon, z_\varepsilon) \varphi dx dt. \end{aligned} \quad (3.5)$$

3.1.1 Existence et unicité de solution pour le système (3.1)

Nous privilégions dans la suite la formulation diagonale (3.3) et nous nous intéressons au problème de Cauchy pour ce système. Pour simplifier la notation, on omettra dorénavant dans cette section l'indice ε des variables u_ε , v_ε , w_ε et z_ε . Dans ce paragraphe nous présentons des résultats d'unicité et d'existence locale de solution pour le système (3.3) et nous discuterons des conditions pour l'existence globale de solution.

On commence par établir une caractérisation équivalente des solutions faibles du problème de Cauchy pour le système (3.3) dans l'espace $C([0, T]; L_{loc}^1(\mathbb{R}))^2$.

Lemme 3.1.

Soit $(w_0, z_0) \in L^\infty(\mathbb{R})^2$ et $(w, z) \in L^\infty([0, T]; L^\infty(\mathbb{R}))^2 \cap C([0, T]; L_{loc}^1(\mathbb{R}))^2$, pour tout $T > 0$. Alors (w, z) est une solution faible du problème de Cauchy (3.3)-(3.4) si et seulement si, pour tout $t \in [0, T]$,

$$\begin{cases} w(\cdot, t) = w_0(\cdot - at) + \int_0^t F(w, z)(\cdot - a(t - \tau), \tau) d\tau, \\ z(\cdot, t) = z_0(\cdot + at) + \int_0^t F(w, z)(\cdot + a(t - \tau), \tau) d\tau. \end{cases} \quad (3.6)$$

Démonstration.

On commence par remarquer que, si $(w, z) \in C([0, T]; L^1_{loc}(\mathbb{R}))^2$, alors le membre de droite de (3.6) définit bien une fonction de l'espace $C([0, T]; L^1_{loc}(\mathbb{R}))^2$. D'une part, si w_0 et $z_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$, alors $w_0(\cdot - at)$ et $z_0(\cdot + at) \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, pour chaque $t > 0$, et la continuité par rapport à t de ces fonctions comme fonctions à valeurs dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ peut être obtenue par un raisonnement de densité. D'autre part, en faisant un raisonnement similaire, du fait que F est une fonction régulière et que w et z appartiennent à l'espace $C([0, T]; L^1_{loc}(\mathbb{R}))$, on conclut que les fonctions $s \mapsto F((w, z)(\cdot \pm a(t - s), s))$ y appartiennent aussi. Finalement, la continuité des applications

$$t \longrightarrow \int_0^t F(w, z)(\cdot \pm a(t - \tau), \tau) d\tau$$

comme fonctions définies dans $[0, T]$ et à valeurs dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ est facilement vérifiée car, sur chaque borné Ω de \mathbb{R} ,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left| \int_0^t F(w, z)(x \pm a(t - \tau), \tau) d\tau - \int_0^{t'} F(w, z)(x \pm a(t' - \tau), \tau) d\tau \right| dx \leq \\ \leq \int_0^t \int_{\Omega} |F(w, z)(x \pm a(t - \tau), \tau) - F(w, z)(x \pm a(t' - \tau), \tau)| dx d\tau + \\ \int_t^{t'} \int_{\Omega} |F(x \pm a(t' - \tau), \tau) d\tau| \end{aligned}$$

et les deux termes du membre de droite de l'inégalité précédente tendent vers zéro, quand t tend vers t' , le premier parce que F est une fonction lipschitzienne sur les ensembles bornés et w et z continues à valeurs dans $L^1(\Omega)$, le deuxième parce que la fonction intégrée est bornée. Nous montrons maintenant le résultat du lemme en deux étapes.

1ère étape : Si $(w, z) \in C([0, T]; L^1_{loc}(\mathbb{R}))^2$ est une solution faible du problème de Cauchy (3.3)-(3.4), alors (w, z) vérifie (3.6).

Si (w, z) est une solution faible du problème de Cauchy (3.3)-(3.4), alors, en effectuant pour chaque $t > 0$ le changement de variables $x - at = y$, on obtient, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R} \times]0, +\infty[)$,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} w(y + at, t) (\varphi_t + a\varphi_x)(y + at, t) dy dt \\ = - \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} F(w, z)(y + at, t) \varphi(y + at, t) dy dt, \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} w(y + at, t) \frac{\partial}{\partial t} (\varphi(y + at, t)) dy dt \\ = - \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} F(w, z)(y + at, t) \varphi(y + at, t) dy dt. \end{aligned}$$

On en déduit que, pour toute fonction $\psi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R} \times]0, +\infty[)$,

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} w(y + at, t) \frac{\partial \psi}{\partial t}(y, t) dy dt = - \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} F(w, z)(y + at, t) \psi(y, t) dy dt,$$

et on a donc

$$\frac{\partial}{\partial t}(w(\cdot + at, t)) = F(w, z)(\cdot + at, t)$$

au sens des distributions. Comme $F(w, z)(\cdot + at, t) \in C([0, T]; L_{loc}^1(\mathbb{R}))$, on obtient

$$w(x + at, t) = w(x, 0) + \int_0^t F(w, z)(\cdot + a\tau, \tau) d\tau, \quad (3.7)$$

dans $L_{loc}^1(\mathbb{R})$, pour chaque $t > 0$. Il ne reste qu'à montrer que $w(x, 0) = w_0(x)$. Pour le faire on considère $\varphi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty[)$ et on introduit (3.7) dans la formulation intégrale (3.5). En faisant le même changement de variables que ci-dessus, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \left(w(y, 0) + \int_0^t F(w, z)(y + a\tau, \tau) d\tau \right) \frac{\partial}{\partial t} \varphi(y + at, t) dy dt \\ + \int_{\mathbb{R}} w_0(y, 0) \varphi(y, 0) dy = - \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} F(w, z)(y + at, t) \varphi(y + at, t) dy dt. \end{aligned}$$

En intégrant par parties on conclut que

$$\begin{aligned} - \int_{\mathbb{R}} w(y, 0) \varphi(y, 0) dy - \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} F(w, z)(y + at, t) \varphi(y + at, t) dy dt, \\ + \int_{\mathbb{R}} w_0(y, 0) \varphi(y, 0) dy = - \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} F(w, z)(y + at, t) \varphi(y + at, t) dy dt, \end{aligned}$$

et donc

$$- \int_{\mathbb{R}} w(y, 0) \varphi(y, 0) dy + \int_{\mathbb{R}} w_0(y, 0) \varphi(y, 0) dy = 0.$$

Cette égalité étant valable pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty[)$, on a $w(x, 0) = w_0(x)$, p. p. $x \in \mathbb{R}$ et, de (3.7), on conclut que (3.6) est vérifié (on raisonne de la même façon pour z).

2ème étape : Si (w, z) est une solution de (3.6), alors (w, z) est une solution faible du problème de Cauchy (3.3)-(3.4).

On multiplie les deux membres de (3.6) par $\varphi_t + a\varphi_x$, où $\varphi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty[)$, et on intègre sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$. On a, d'une part,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} w_0(x - at) (\varphi_t(x, t) + a\varphi_x(x, t)) dx dt \\ = \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} w_0(y) (\varphi_t(y + at, t) + a\varphi_x(y + at, t)) dy dt \\ = \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} w_0(y) \frac{\partial}{\partial t} \varphi(y + at, t) dy dt \\ = - \int_{\mathbb{R}} w_0(y) \varphi(y, 0) dy \end{aligned}$$

et, d'autre part,

$$\begin{aligned}
& \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^t F(w, z)(x - a(t - \tau), \tau) d\tau \right) \varphi_t(x, t) + a\varphi_x(x, t) dx dt = \\
&= \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^t F(w, z)(y + a\tau, \tau) d\tau \right) \varphi_t(y + at, t) + a\varphi_x(y + at, t) dy dt \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^{+\infty} \int_0^t F(w, z)(y + a\tau, \tau) d\tau \left(\frac{\partial}{\partial t} \varphi(y + at, t) \right) dt \right) dy \\
&= - \int_{\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} F(w, z)(y + at, t) \varphi(y + at, t) dt dy \\
&= - \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} F(w, z)(x, t) \varphi(x, t) dt dy.
\end{aligned}$$

De manière analogue on prouve des égalités similaires pour z et on peut donc conclure que (w, z) est une solution faible du problème de Cauchy (3.3)-(3.4). \square

Trouver une solution du problème de Cauchy (3.3)-(3.4) dans $C([0, T]; L^1_{loc}(\mathbb{R}))^2$ est ainsi équivalent à trouver une solution des équations (3.6) dans cet espace.

Nous supposons dorénavant que la fonction F est une fonction lipschitzienne sur les bornés de \mathbb{R}^2 , c'est-à-dire que F vérifie la propriété :

Pour tout $L > 0$, il existe $K_L \geq 0$ tel que

$$|F(w, z) - F(\bar{w}, \bar{z})| \leq K_L |(w, z) - (\bar{w}, \bar{z})|,$$

pour tous $(w, z), (\bar{w}, \bar{z})$ tels que $|(w, z)| \leq L, |(\bar{w}, \bar{z})| \leq L$.

Nous montrons ensuite un résultat d'unicité.

Lemme 3.2.

Soient $w_0, z_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$. Alors si $(w, z), (\tilde{w}, \tilde{z})$ sont deux solutions de (3.6) dans $L^\infty([0, T]; L^\infty(\mathbb{R}))^2$, pour tout $T > 0$, on a $(w, z) = (\tilde{w}, \tilde{z})$.

Démonstration.

On pose K_L la constante de Lipschitz de F associée à la valeur

$$L = \max \left\{ \|(\tilde{w}, \tilde{z})\|_{L^\infty}, \|(w, z)\|_{L^\infty} \right\}.$$

On a

$$\begin{aligned}
|w(x, t) - \tilde{w}(x, t)| &\leq \int_0^t \left| F(w, z)(x - a(t - \tau), \tau) - F(\tilde{w}, \tilde{z})(x - a(t - \tau), \tau) \right| d\tau \\
&\leq \int_0^t K_L \left| (w, z)(x - a(t - \tau), \tau) - (\tilde{w}, \tilde{z})(x - a(t - \tau), \tau) \right| d\tau \\
&\leq K_L \int_0^t \|(w, z) - (\tilde{w}, \tilde{z})\|_{L^\infty(\mathbb{R})^2}(\cdot, \tau) d\tau.
\end{aligned}$$

On en déduit

$$\|w - \tilde{w}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}(\cdot, t) \leq K_L \int_0^t \|(w, z) - (\tilde{w}, \tilde{z})\|_{L^\infty(\mathbb{R})^2}(\cdot, \tau) d\tau.$$

En raisonnant de manière analogue on obtient la même inégalité pour $\|z - \tilde{z}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}(\cdot, t)$. On a donc

$$\|(w, z) - (\tilde{w}, \tilde{z})\|_{L^\infty(\mathbb{R})^2}(\cdot, t) \leq K_L \int_0^t \|(w, z) - (\tilde{w}, \tilde{z})\|_{L^\infty(\mathbb{R})^2}(\cdot, \tau) d\tau,$$

et on conclut

$$\|(w, z) - (\tilde{w}, \tilde{z})\|_{L^\infty(\mathbb{R})^2}(\cdot, t) = 0,$$

par le lemme de Gronwall. Cette égalité étant valable pour tout $t \in [0, T]$, on obtient $(w, z) = (\tilde{w}, \tilde{z})$ dans $L^\infty([0, T]; L^\infty(\mathbb{R}))^2$. \square

Soit M une constante positive telle que $M > \|(w_0, z_0)\|_\infty$ et K_M la constante de Lipschitz de F associée à la valeur M . On considère $T_M > 0$ tel que

$$T_M < \min \left\{ 1, \frac{M - \|(w_0, z_0)\|_\infty}{|F(0, 0)| + MK_M}, \frac{1}{aK_M + K_M} \right\}.$$

Nous présentons maintenant un résultat d'existence locale.

Théorème 3.1.

Soit $(w_0, z_0) \in L^\infty(\mathbb{R})^2$. Alors, le problème de Cauchy (3.3)-(3.4) admet une unique solution (w, z) telle que $(w, z) \in C([0, T_M]; L^1_{loc}(\mathbb{R}))^2$.

Démonstration.

Soit Ω un intervalle ouvert borné de \mathbb{R} tel que $[-2aT_M, 2aT_M] \subseteq \Omega$. Cette condition implique que Ω intersecte l'intervalle $\Omega \pm aT_M$ dans un ensemble de mesure non nulle et que la mesure de $\Omega \pm aT_M \setminus \Omega$ est plus petite que aT . Nous allons montrer, par application du théorème du point fixe de Banach, que l'équation (3.6) admet une solution (w, z) appartenant à $C([0, T_M]; L^1(\Omega))^2 \cap L^\infty([0, T_M]; L^\infty(\mathbb{R}))^2$. Ceci est suffisant pour prouver le théorème puisque, si $\tilde{\Omega}$ est un ouvert arbitraire, il existe toujours un ouvert Ω dans les conditions ci-dessus tel que $\tilde{\Omega} \subseteq \Omega$. Si (w, z) est solution dans $C([0, T_M]; L^1(\Omega))^2$, elle l'est aussi dans $C([0, T_M]; L^1(\tilde{\Omega}))^2$. Comme on a plus haut montré l'unicité de solution, on conclut l'existence d'une solution appartenant à l'espace $C([0, T_M]; L^1_{loc}(\mathbb{R}))^2$.

On considère l'espace fonctionnel

$$\mathcal{C} = \left\{ (w, z) \in C([0, T_M]; L^1(\Omega))^2 \cap L^\infty([0, T_M]; L^\infty(\mathbb{R}))^2 : \|(w, z)\|_\infty \leq M \right\},$$

et la norme définie dans \mathcal{C} par

$$\|(w, z)\|_{\mathcal{C}} = \sup_{[0, T_M]} \|(w, z)(\cdot, t)\|_{L^1(\Omega)^2} + \text{esssup}_{[0, T_M]} \|(w, z)(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})^2}.$$

L'espace \mathcal{C} muni de cette norme est un espace de Banach. On considère maintenant l'application

$$(\bar{w}, \bar{z}) \longmapsto \mathcal{T}(\bar{w}, \bar{z}) = (w, z),$$

où

$$\begin{aligned} w(\cdot, t) &= w_0(\cdot - at) + \int_0^t F(\bar{w}, \bar{z})(\cdot - a(t - \tau), \tau) d\tau, \\ z(\cdot, t) &= z_0(\cdot + at) + \int_0^t F(\bar{w}, \bar{z})(\cdot + a(t - \tau), \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Notre but est de montrer que l'application \mathcal{T} est une contraction dans l'espace \mathcal{C} . On remarque que, si $(\bar{w}, \bar{z}) \in C([0, T_M]; L^1(\Omega))^2$, alors $(w, z) = \mathcal{T}(\bar{w}, \bar{z}) \in C([0, T_M]; L^1(\Omega))^2$. Donc, si l'on montre que les éléments de \mathcal{C} sont stables par rapport à la norme L^∞ , on conclut que \mathcal{T} applique l'espace \mathcal{C} dans lui-même. Nous commençons alors par montrer cette propriété de stabilité.

1. *Borne L^∞ .*

Soit $(\bar{w}, \bar{z}) \in \mathcal{C}$ et $(w, z) = \mathcal{T}(\bar{w}, \bar{z})$. Alors

$$\begin{aligned} |w(x, t)| &\leq \|w_0\|_\infty + \int_0^t \left| F(\bar{w}, \bar{z})(x - a(t - \tau), \tau) \right| d\tau \\ &\leq \|w_0\|_\infty + \int_0^t \left| F(\bar{w}, \bar{z})(x - a(t - \tau), \tau) - F(0, 0) \right| + |F(0, 0)| d\tau \\ &\leq \|w_0\|_\infty + K_M T_M \left\| (\bar{w}, \bar{z}) \right\|_{L^\infty([0, T_M]; L^\infty(\mathbb{R}))^2} + T_M |F(0, 0)| \\ &\leq \|w_0\|_\infty + T_M (MK_M + |F(0, 0)|). \end{aligned}$$

Maintenant, puisque $T_M \leq \frac{M - \|(w_0, z_0)\|_\infty}{|F(0, 0)| + K_M M}$, on obtient $\|w\|_\infty \leq M$. On prouve de manière analogue que $\|z\|_\infty \leq M$, d'où l'on conclut que $\|(w, z)\|_\infty \leq M$ et donc que $(w, z) = \mathcal{T}(\bar{w}, \bar{z}) \in \mathcal{C}$.

2. *Contraction dans \mathcal{C} .*

Nous montrons ensuite que l'application \mathcal{T} est une contraction. Soient (\bar{w}, \bar{z}) et $(\tilde{w}, \tilde{z}) \in \mathcal{C}$. Nous allons utiliser la notation

$$(\mathcal{T}_{\bar{w}}, \mathcal{T}_{\bar{z}}) = \mathcal{T}(\bar{w}, \bar{z}), \quad (\mathcal{T}_{\tilde{w}}, \mathcal{T}_{\tilde{z}}) = \mathcal{T}(\tilde{w}, \tilde{z}).$$

On a alors, d'une part,

$$|(\mathcal{T}_{\bar{w}} - \mathcal{T}_{\tilde{w}})(x, t)| \leq \int_0^t \left| (F(\bar{w}, \bar{z}) - F(\tilde{w}, \tilde{z}))(x - a(t - \tau), \tau) \right| d\tau$$

et donc

$$\|\mathcal{T}_{\bar{w}} - \mathcal{T}_{\tilde{w}}\|_{L^\infty([0, T_M]; L^\infty(\mathbb{R}))} \leq K_M T_M \left\| (\bar{w}, \bar{z}) - (\tilde{w}, \tilde{z}) \right\|_{L^\infty([0, T_M]; L^\infty(\mathbb{R}))^2}. \quad (3.8)$$

D'autre part,

$$\|\mathcal{T}_{\bar{w}} - \mathcal{T}_{\tilde{w}}\|_{C([0, T_M]; L^1(\Omega))} = \sup_{[0, T_M]} \int_\Omega \left| \int_0^t (F(\bar{w}, \bar{z}) - F(\tilde{w}, \tilde{z}))(x - a(t - \tau), \tau) d\tau \right| dx,$$

et, pour chaque $0 \leq t \leq T_M$, on a

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left| \int_0^t (F(\bar{w}, \bar{z}) - F(\tilde{w}, \tilde{z}))(x - a(t - \tau), \tau) d\tau \right| dx \\
& \leq \int_0^t \int_{\Omega - a(t - \tau)} \left| (F(\bar{w}, \bar{z}) - F(\tilde{w}, \tilde{z}))(x, \tau) \right| dx d\tau \\
& \leq \int_0^t \int_{\Omega} \left| (F(\bar{w}, \bar{z}) - F(\tilde{w}, \tilde{z}))(x, \tau) \right| dx d\tau \\
& \quad + \int_0^t \int_{\Omega - aT_M \setminus \Omega} \left| (F(\bar{w}, \bar{z}) - F(\tilde{w}, \tilde{z}))(x, \tau) \right| dx d\tau \\
& \leq T_M K_M \|(\bar{w}, \bar{z}) - (\tilde{w}, \tilde{z})\|_{C([0, T_M]; L^1(\Omega))} + aT_M^2 K_M \|(\bar{w}, \bar{z}) - (\tilde{w}, \tilde{z})\|_{L^\infty([0, T_M]; L^\infty(\mathbb{R}))^2}.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

De (3.8) et (3.9), on peut conclure que

$$\begin{aligned}
& \|\mathcal{T}_{\bar{w}} - \mathcal{T}_{\tilde{w}}\|_{L^\infty([0, T_M]; L^\infty(\mathbb{R}))} + \|\mathcal{T}_{\bar{w}} - \mathcal{T}_{\tilde{w}}\|_{C([0, T_M]; L^1(\Omega))} \\
& \leq (T_M K_M + aT_M^2 K_M) \|(\bar{w}, \bar{z}) - (\tilde{w}, \tilde{z})\|_{\mathcal{C}}.
\end{aligned}$$

De manière analogue, on prouve la même estimation pour $\|\mathcal{T}_{\bar{z}} - \mathcal{T}_{\tilde{z}}\|$, ce qui permet de conclure que

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{T}(\bar{w}, \bar{z}) - \mathcal{T}(\tilde{w}, \tilde{z})\|_{\mathcal{C}} & \leq (T_M K_M + aT_M^2 K_M) \|(\bar{w}, \bar{z}) - (\tilde{w}, \tilde{z})\|_{\mathcal{C}} \\
& \leq T_M (K_M + aK_M) \|(\bar{w}, \bar{z}) - (\tilde{w}, \tilde{z})\|_{\mathcal{C}},
\end{aligned}$$

puisque $T_M < 1$. Comme on a

$$T_M < \frac{1}{aK_M + K_M},$$

on conclut que l'application \mathcal{T} est une contraction stricte de \mathcal{C} dans lui-même. Elle admet donc un unique point fixe (w, z) , d'après le théorème de Banach. Le couple (w, z) est ainsi solution du problème de Cauchy (3.3)-(3.4) dans $C([0, T_M]; L^1(\Omega))^2 \cap L^\infty([0, T_M]; L^\infty(\mathbb{R}))^2$. \square

Le théorème précédent donne l'existence d'une unique solution de (3.6) pour un temps T_M fini. *A priori* on ne peut pas garantir que cette solution soit définie pour tout temps $T > 0$. Cependant, si l'on est dans un des deux cas suivants, on peut montrer que la solution donnée par le théorème précédent peut se prolonger à $[0, +\infty[$:

1. F est une fonction globalement lipschitzienne sur \mathbb{R}^2 ;
2. Il est possible d'établir une estimation *a priori* de la norme L^∞ des solutions (w, z) de (3.6).

En effet, dans le cas où F est globalement lipschitzienne, si l'on désigne par K la constante de Lipschitz globale de F , on peut remplacer K_M par K dans la définition de T_M et, dans ce cas, prendre

$$M = 2\|(w_0, z_0)\|_\infty + \frac{|F(0, 0)|}{K},$$

de sorte que

$$\frac{M - \|(w_0, z_0)\|_\infty}{|F(0, 0)| + MK} = \frac{1}{K} \frac{\|(w_0, z_0)\|_\infty + \frac{|F(0, 0)|}{K}}{\frac{|F(0, 0)|}{K} + 2\|(w_0, z_0)\|_\infty + \frac{|F(0, 0)|}{K}} = \frac{1}{2K}.$$

Comme T_M ne dépend plus maintenant de la donnée initiale, nous pouvons itérer la procédure de la preuve du théorème précédent dans les intervalles temporels $[nT_M, (n+1)T_M]$, $n \in \mathbb{N}$, de sorte que l'on obtient une solution globale de (3.6) dans $C([0, +\infty[; L_{loc}^1(\mathbb{R}))^2$. Cette solution est unique, d'après le Lemme 3.2.

Dans le cas où il existe $C > 0$ tel que, si (w, z) est solution de (3.6), alors

$$\|(w, z)\|_{L^\infty([0, +\infty[; L^\infty(\mathbb{R}))^2} \leq C, \quad (3.10)$$

on peut choisir $M = C$ et

$$T_M < \min \left\{ 1, \frac{1}{aK_C + K_C} \right\},$$

où K_C est la constante de Lipschitz de F associée à la valeur C . À nouveau on voit que T_M ne dépend pas de la donnée initiale et on peut alors obtenir de la même manière une solution globale de (3.6).

Dans [Ser00], Serre prouve que la propriété (3.10) est valable, en montrant l'existence d'une région invariante pour le système (3.1). On présente ici ce résultat. On rappelle d'abord qu'une région invariante pour le système (3.1) est un ensemble \mathcal{C} qui a la propriété suivante : pour toute donnée initiale (u_0, v_0) à valeurs dans \mathcal{C} , la solution (u, v) du problème de Cauchy (3.1)-(3.2) prend encore ses valeurs dans \mathcal{C} .

On considère alors K un intervalle de \mathbb{R} où la condition sous-caractéristique

$$|f'(u)| < a, \quad \forall u \in K, \quad (3.11)$$

est vérifiée, et on note par h^+ et h^- respectivement les fonctions

$$h^\pm(u) = f(u) \pm au. \quad (3.12)$$

On considère aussi l'ensemble

$$\mathcal{D}_K = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : v + au \in h^+(K), v - au \in h^-(K)\}.$$

On a alors le résultat suivant :

Théorème 3.2 (Serre, [Ser00]).

Soit K un intervalle de \mathbb{R} où la condition sous-caractéristique (3.11) est vérifiée. On a les propriétés suivantes :

1. Si $(u, v) \in \mathcal{D}_K$, alors $u \in K$.
2. L'ensemble \mathcal{D}_K est une région invariante pour le système de relaxation (3.1).

Comme conséquence de ce résultat, on peut alors énoncer le résultat d'existence globale suivant :

Théorème 3.3.

Soit K un intervalle borné de \mathbb{R} où la condition sous-caractéristique (3.11) est vérifiée et $(w_0, z_0) \in L^\infty(\mathbb{R})^2$ tel que $(w_0, z_0) \in h^+(K) \times h^-(K)$. Alors, le problème de Cauchy (3.3)-(3.4) admet une solution globale $(w, z) \in C([0, +\infty[; L_{loc}^1(\mathbb{R}))^2$.

3.1.2 Entropies pour le système de relaxation

On s'intéresse aux entropies pour le système (3.1), c'est-à-dire aux fonctions $E : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ pour lesquelles il existe $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que, si (u, v) est une solution régulière du système

$$\begin{cases} u_t + v_x = 0, \\ v_t + a^2 u_x = 0, \end{cases}$$

alors (u, v) est encore solution de l'équation

$$(E(u, v))_t + (F(u, v))_x = 0.$$

La fonction F est le flux d'entropie. Il suffit pour cela que le couple (E, F) vérifie l'équation

$$\nabla E \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a^2 & 0 \end{pmatrix} = \nabla F,$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} E_u = F_v, \\ a^2 E_v = F_u, \end{cases}$$

et donc

$$E_{uu} = a^2 E_{vv}.$$

La solution générale de cette équation des ondes est donnée par

$$E(u, v) = e^+(v + au) - e^-(v - au), \quad (3.13)$$

avec $e^+, e^- : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions régulières. La forme générale du flux d'entropie correspondant est alors donnée par

$$F(u, v) = ae^+(v + au) + ae^-(v - au). \quad (3.14)$$

On remarque que l'on peut voir les couples (e^+, ae^+) et $(e^-, -ae^-)$ respectivement comme des couples entropie-flux d'entropie pour les équations

$$w_t + aw_x = \frac{1}{\varepsilon}(f(u) - v)$$

et

$$z_t - az_x = \frac{1}{\varepsilon}(f(u) - v).$$

Ainsi, si (u, v) est une solution régulière du système (3.1), (u, v) vérifie encore l'équation

$$(E(u, v))_t + (F(u, v))_x = E_v(u, v) \frac{1}{\varepsilon} (f(u) - v).$$

On se donne maintenant un couple entropie-flux d'entropie (η, q) pour la loi de conservation scalaire

$$u_t + (f(u))_x = 0, \quad (3.15)$$

avec $\eta, q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions régulières. Le couple (η, q) vérifie donc

$$f'(u)\eta'(u) = q'(u), \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

On s'intéresse désormais aux couples entropiques (E, F) donnés par (3.13)-(3.14), qui coïncident avec (η, q) sur la variété d'équilibre $v = f(u)$, c'est-à-dire tels que

$$(E, F)(u, f(u)) = (\eta, q)(u). \quad (3.16)$$

On fait ici une construction analogue à celle de Serre dans [Ser00]. Notamment, on prend en compte que l'ensemble \mathcal{D}_K est une région invariante pour le système (3.1), comme le montre le théorème 3.2. On considère K un intervalle de \mathbb{R} tel que la condition sous-caractéristique (3.11) est vérifiée et les fonctions h^+ et h^- définies par (3.12) introduites au paragraphe précédent. On vérifie aisément, comme conséquence de (3.11), que les fonctions h^\pm sont des difféomorphismes entre K et les ensembles $h^\pm(K)$.

Maintenant, l'égalité (3.16) est équivalente à

$$\begin{cases} e^+(f(u) + au) - e^-(f(u) - au) = \eta(u) \\ ae^+(f(u) + au) + ae^-(f(u) - au) = q(u), \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} e^+(f(u) + au) = \frac{q + a\eta}{2a}(u) \\ e^-(f(u) - au) = \frac{q - a\eta}{2a}(u). \end{cases}$$

On en déduit que (3.16) est vérifiée pourvu que les fonctions e^+ et e^- vérifient

$$\begin{cases} e^+(w) = \frac{a\eta + q}{2a}((h^+)^{-1}(w)), \quad \forall w \in h^+(K), \\ e^-(z) = \frac{q - a\eta}{2a}((h^-)^{-1}(z)), \quad \forall z \in h^-(K). \end{cases} \quad (3.17)$$

On pose alors

$$\begin{cases} E(u, v) = \frac{a\eta + q}{2a}((h^+)^{-1}(v + au)) - \frac{q - a\eta}{2a}((h^-)^{-1}(v - au)), \\ F(u, v) = \frac{a\eta + q}{2}((h^+)^{-1}(v + au)) + \frac{q - a\eta}{2}((h^-)^{-1}(v - au)), \end{cases} \quad (3.18)$$

pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(v + au, v - au) \in h^+(K) \times h^-(K)$. Le couple (E, F) définit alors un couple entropie-flux d'entropie sur l'ensemble \mathcal{D}_K , qui vérifie (3.16).

Montrons maintenant que, si η est une fonction convexe sur K , alors E l'est aussi sur \mathcal{D}_K , en prouvant que la matrice Hessienne de E est définie positive. Pour ce faire, on commence par calculer les dérivées secondes de E . Commençons par remarquer que, vu que (η, q) est un couple entropie-flux d'entropie pour l'équation scalaire (3.15), on a

$$\begin{aligned} (a\eta + q)'(u) &= a\eta'(u) + q'(u) = (a + f'(u))\eta'(u), \\ (q - a\eta)'(u) &= q'(u) - a\eta'(u) = (f'(u) - a)\eta'(u). \end{aligned}$$

On en déduit, pour tout $w = v + au \in h^+(K)$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{a\eta + q}{2a} \right) ((h^+)^{-1}(w)) &= \left(\frac{\eta'}{2a}(f' + a) \right) ((h^+)^{-1}(w)) \times \frac{1}{(a + f')((h^+)^{-1}(w))} \\ &= \frac{\eta'}{2a} ((h^+)^{-1}(w)) \end{aligned}$$

et, pour tout $z = v - au \in h^-(K)$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{a\eta - q}{2a} \right) ((h^-)^{-1}(z)) &= \left(\frac{\eta'}{2a}(a - f') \right) ((h^-)^{-1}(z)) \times \frac{1}{(f' - a)((h^-)^{-1}(z))} \\ &= -\frac{\eta'}{2a} ((h^-)^{-1}(z)). \end{aligned}$$

On obtient, de manière analogue,

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{a\eta + q}{2a} \right) ((h^+)^{-1}(w)) = \frac{\eta'}{2} ((h^+)^{-1}(w))$$

et

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{a\eta - q}{2a} \right) ((h^-)^{-1}(z)) = \frac{\eta'}{2} ((h^-)^{-1}(z)).$$

On peut alors conclure que

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial u}(u, v) &= \frac{\eta'}{2} ((h^+)^{-1}(w)) + \frac{\eta'}{2} ((h^-)^{-1}(z)), \\ \frac{\partial E}{\partial v}(u, v) &= \frac{\eta'}{2a} ((h^+)^{-1}(w)) - \frac{\eta'}{2a} ((h^-)^{-1}(z)), \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 E}{\partial u^2}(u, v) \\ &= \frac{\eta''}{2} ((h^+)^{-1}(w)) \times \frac{a}{(f' + a)((h^+)^{-1}(w))} - \frac{\eta''}{2} ((h^-)^{-1}(z)) \times \frac{1}{(f' - a)((h^-)^{-1}(z))}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 E}{\partial v^2}(u, v) \\ &= \frac{\eta''}{2a} ((h^+)^{-1}(w)) \times \frac{1}{(f' + a)((h^+)^{-1}(w))} - \frac{\eta''}{2a} ((h^-)^{-1}(z)) \times \frac{1}{(f' - a)((h^-)^{-1}(z))} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 E}{\partial u \partial v}(u, v) \\ &= \frac{\eta''}{2} ((h^+)^{-1}(w)) \times \frac{1}{(f' + a)((h^+)^{-1}(w))} + \frac{\eta''}{2} ((h^-)^{-1}(z)) \times \frac{1}{(f' - a)((h^-)^{-1}(z))}. \end{aligned}$$

Comme η est une fonction convexe et la condition sous-caractéristique (3.11) est vérifiée sur K , on déduit que

$$\frac{\partial^2 E}{\partial u^2}(u, v) \geq 0, \quad \frac{\partial^2 E}{\partial v^2}(u, v) \geq 0,$$

et

$$\frac{\partial^2 E}{\partial u^2} \frac{\partial^2 E}{\partial v^2} - \left(\frac{\partial^2 E}{\partial u \partial v} \right)^2 = - \frac{\eta''((h^+)^{-1}(w))\eta''((h^-)^{-1}(z))}{(f' + a)((h^+)^{-1}(w))(f' - a)((h^-)^{-1}(z))} \geq 0,$$

pour toute paire (u, v) telle que $(v + au, v - au) \in h^+(K) \times h^-(K)$. La positivité des trois quantités ci-dessus implique que la matrice Hessienne de la fonction E est définie positive sur \mathcal{D}_K , E étant alors une fonction convexe sur cet ensemble.

3.2 Convergence d'un schéma de relaxation

Dans cette section, nous étudions la convergence d'un schéma de volumes finis pour la loi de conservation scalaire (3.15), basé sur l'approximation de cette équation par le système de relaxation (3.1). Le schéma que nous allons considérer correspond à la version scalaire de celui présenté dans [LS01]. Dans ce travail, on considère le système de relaxation 2n-dimensionnel

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial t} + A^2 \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{\varepsilon}(F(U) - V), \end{cases} \quad (3.19)$$

où $A^2 = a^2 I_n$, a étant une constante positive vérifiant cette fois la condition

$$\max_{i=1, \dots, n} |\lambda_i(U)| < a$$

sur un ensemble $\mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}^n$, où $\lambda_1(U), \dots, \lambda_n(U)$ désignent les valeurs propres de la matrice jacobienne de F en chaque point U . Les auteurs montrent alors la convergence d'un schéma numérique basé sur la discrétisation de (3.19) vers une solution entropique du système hyperbolique de lois de conservation

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F(U) = 0,$$

lorsque le pas de temps Δt , le pas d'espace Δx et le temps de relaxation ε convergent vers 0. Pour le faire, deux outils sont utilisés : une estimation uniforme de la norme L^∞ des solutions approchées, basée sur l'existence de régions invariantes pour le système (3.19), et les résultats de compacité par compensation de F. Murat et L. Tartar (cf. [Mur78] et [Tar79]) pour pouvoir passer à la limite dans la suite des solutions approchées. Ici nous nous proposons d'étudier la convergence de ce schéma dans le cas unidimensionnel, en utilisant une autre méthode, basée notamment sur une estimation de la variation totale des suites approchées.

3.2.1 Le schéma de relaxation

Nous décrivons ici le schéma de relaxation. On se donne un pas de temps Δt , un pas d'espace Δx , et nous définissons un maillage uniforme régulier de $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$ dont les mailles sont les pavés $[x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}[\times [t^n, t^{n+1}[$, avec

$$x_{j+\frac{1}{2}} = \left(j + \frac{1}{2}\right)\Delta x, \quad \forall j \in \mathbb{Z},$$

et $t^n = n\Delta t$, $n \in \mathbb{N}$, de sorte que l'on peut écrire

$$\mathbb{R} = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} [x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}[$$

et

$$[0, T[= \bigcup_{0 \leq n \leq N} [t^n, t^{n+1}[$$

si $T = N\Delta t$. On note encore $x_j = j\Delta x$, $\forall j \in \mathbb{Z}$. On propose une solution discrète de (3.1) de la forme

$$((u_\varepsilon)_\Delta, (v_\varepsilon)_\Delta)(x, t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{n \geq 0} ((u_\varepsilon)_j^n, (v_\varepsilon)_j^n) \chi_{[x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}[\times [t^n, t^{n+1}[}(x, t), \quad (3.20)$$

où $\chi_{[x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}[\times [t^n, t^{n+1}[}$ désigne la fonction caractéristique de l'ensemble

$$[x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}[\times [t^n, t^{n+1}[$$

de sorte que l'on cherche à que $((u_\varepsilon)_j^n, (v_\varepsilon)_j^n)$ soit une approximation de

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} (u_\varepsilon, v_\varepsilon)(t^n, x) dx.$$

On omettra dans un premier temps, pour simplifier les notations, les indices ε dans les définitions ci-dessus.

Discretisation des données initiales

La condition initiale discrète pour u est définie par la moyenne de la donnée initiale u_0 dans l'intervalle $[x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}[$: on pose, pour $j \in \mathbb{Z}$,

$$u_j^0 = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} u_0(x) dx,$$

La condition initiale discrète pour v est définie par

$$v_j^0 = f(u_j^0), \quad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

Ceci signifie que la condition initiale est considérée à l'équilibre.

Évolution en temps

Afin de donner la forme explicite des solutions discrètes, on pose

$$(w_j^n, z_j^n) := (v_j^n + au_j^n, v_j^n - au_j^n), \quad j \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N},$$

de sorte que (w_j^n, z_j^n) soit une approximation de la moyenne

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} (w, z)(t^n, x) dx.$$

Si l'on suppose connue la solution approchée (w_Δ, z_Δ) à l'instant $t = t^n$, on propose de la définir à l'instant $t = t^{n+1}$ par la solution (w_j^{n+1}, z_j^{n+1}) du schéma

$$\begin{cases} \frac{1}{\Delta t}(w_j^{n+1} - w_j^n) + \frac{a}{\Delta x}(w_j^n - w_{j-1}^n) = \frac{1}{\varepsilon}[f(u_j^{n+1}) - v_j^{n+1}], \\ \frac{1}{\Delta t}(z_j^{n+1} - z_j^n) - \frac{a}{\Delta x}(z_{j+1}^n - z_j^n) = \frac{1}{\varepsilon}[f(u_j^{n+1}) - v_j^{n+1}]. \end{cases} \quad (3.21)$$

On montre que ce schéma est bien défini, c'est-à-dire que les équations (3.21) admettent une solution. Pour ce faire, on pose

$$\begin{cases} w_j^{n+\frac{1}{2}} = w_j^n - a \frac{\Delta t}{\Delta x}(w_j^n - w_{j-1}^n), \\ z_j^{n+\frac{1}{2}} = z_j^n + a \frac{\Delta t}{\Delta x}(z_{j+1}^n - z_j^n), \end{cases}$$

de sorte que, si

$$u_j^{n+\frac{1}{2}} = \frac{w_j^{n+\frac{1}{2}} - z_j^{n+\frac{1}{2}}}{2a}, \quad v_j^{n+\frac{1}{2}} = \frac{w_j^{n+\frac{1}{2}} + z_j^{n+\frac{1}{2}}}{2},$$

on a

$$\begin{cases} u_j^{n+\frac{1}{2}} = u_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n) + \frac{a\Delta t}{2\Delta x}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n), \\ v_j^{n+\frac{1}{2}} = v_j^n - \frac{a^2\Delta t}{2\Delta x}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{a\Delta t}{2\Delta x}(v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n). \end{cases}$$

On remarque maintenant que (w_j^{n+1}, z_j^{n+1}) vérifient (3.21) si et seulement si (u_j^{n+1}, v_j^{n+1}) vérifient

$$\begin{cases} \frac{1}{\Delta t}(u_j^{n+1} - u_j^n) + \frac{1}{2\Delta x}(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n) - \frac{a}{2\Delta x}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) = 0, \\ \frac{1}{\Delta t}(v_j^{n+1} - v_j^n) + \frac{a^2}{2\Delta x}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) - \frac{a}{2\Delta x}(v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n) = \frac{1}{\varepsilon}[f(u_j^{n+1}) - v_j^{n+1}], \end{cases} \quad (3.22)$$

et ce schéma est explicite, puisque (3.22) est équivalent à

$$\begin{cases} u_j^{n+1} = u_j^{n+\frac{1}{2}}, \\ v_j^{n+1} = v_j^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{\varepsilon}[f(u_j^{n+1}) - v_j^{n+1}], \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} u_j^{n+1} = u_j^{n+\frac{1}{2}}, \\ v_j^{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{\Delta t}{\varepsilon}} v_j^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\frac{\Delta t}{\varepsilon}}{1 + \frac{\Delta t}{\varepsilon}} f(u_j^{n+1}). \end{cases}$$

On s'intéresse dans la suite de ce chapitre à établir des résultats de stabilité de la norme L^∞ et de la variation totale des solutions approchées. Pour ce faire, nous allons supposer dorénavant que la condition de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL)

$$a \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (3.23)$$

est vérifiée.

3.2.2 Stabilité L^∞

Le but de ce paragraphe est de montrer le résultat suivant :

Théorème 3.4.

Soit $K = [\alpha, \beta]$ un intervalle borné de \mathbb{R} tel que la condition sous-caractéristique (3.11) soit vérifiée sur K . On suppose de plus la condition CFL (3.23) et que $u_0(x) \in K$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, on a les propriétés suivantes :

1. $u_j^n \in K$, $\forall j \in \mathbb{Z}$, $\forall n \in \mathbb{N}$;
2. $w_j^n \in h^+(K)$, $z_j^n \in h^-(K)$, $\forall j \in \mathbb{Z}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Démonstration.

Étant donné que la condition (3.11) est vérifiée sur K , on a

$$(h^+)'(u) = f'(u) + a > 0, \quad (h^-)'(u) = f'(u) - a < 0, \quad \forall u \in K,$$

de sorte que

$$h^+(K) = [h^+(\alpha), h^+(\beta)], \quad h^-(K) = [h^-(\beta), h^-(\alpha)].$$

On va prouver le résultat du théorème par récurrence sur n .

Pour $n = 0$, vu que $u_0(x) \in K$, $\forall x \in \mathbb{R}$ et que u_j^0 est défini par une moyenne de u_0 sur l'intervalle $[x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}[$, on obtient $u_j^0 \in K$, $\forall j \in \mathbb{Z}$. De plus, comme $v_0 = f(u_0)$, on a $w_0 = f(u_0) + au_0 \in h^+(K)$ et $z_0 = f(u_0) - au_0 \in h^-(K)$. On en déduit $w_j^0 \in h^+(K)$, $z_j^0 \in h^-(K)$, $\forall j \in \mathbb{Z}$.

Supposons maintenant que les propriétés 1 et 2 sont valables pour $n \in \mathbb{N}$ et prouvons qu'elles le sont aussi pour $n + 1$. On suppose alors

$$\begin{aligned} \alpha &\leq u_j^n \leq \beta, \\ h^+(\alpha) &\leq w_j^n \leq h^+(\beta), \\ h^-(\beta) &\leq z_j^n \leq h^-(\alpha), \end{aligned}$$

pour tout $j \in \mathbb{Z}$. Ainsi, puisque

$$\begin{cases} w_j^{n+\frac{1}{2}} = w_j^n - a \frac{\Delta t}{\Delta x} (w_j^n - w_{j-1}^n) = w_j^n \left(1 - a \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) + a \frac{\Delta t}{\Delta x} w_{j-1}^n, \\ z_j^{n+\frac{1}{2}} = z_j^n + a \frac{\Delta t}{\Delta x} (z_{j+1}^n - z_j^n) = z_j^n \left(1 - a \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) + a \frac{\Delta t}{\Delta x} z_{j+1}^n, \end{cases}$$

et $1 - a \frac{\Delta t}{\Delta x} \geq 0$, d'après la condition CFL (3.23), on obtient aussi que, pour tout $j \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{cases} h^+(\alpha) \leq w_j^{n+\frac{1}{2}} \leq h^+(\beta), \\ h^-(\beta) \leq z_j^{n+\frac{1}{2}} \leq h^-(\alpha). \end{cases} \quad (3.24)$$

Vu que

$$u_j^{n+\frac{1}{2}} = \frac{w_j^{n+\frac{1}{2}} - z_j^{n+\frac{1}{2}}}{2a},$$

on obtient

$$\frac{h^+(\alpha) - h^-(\alpha)}{2a} \leq u_j^{n+\frac{1}{2}} \leq \frac{h^+(\beta) - h^-(\beta)}{2a},$$

soit

$$\alpha \leq u_j^{n+\frac{1}{2}} \leq \beta, \quad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

Comme $u_j^{n+1} = u_j^{n+\frac{1}{2}}$, on déduit

$$\alpha \leq u_j^{n+1} \leq \beta, \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \quad (3.25)$$

et donc la propriété 1 est valable pour $n+1$. Maintenant on remarque que

$$\begin{cases} w_j^{n+1} = w_j^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{\varepsilon} [f(u_j^{n+1}) - v_j^{n+1}] = w_j^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{\varepsilon} [h^+(u_j^{n+1}) - w_j^{n+1}], \\ z_j^{n+1} = z_j^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{\varepsilon} [f(u_j^{n+1}) - v_j^{n+1}] = z_j^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{\varepsilon} [h^-(u_j^{n+1}) - z_j^{n+1}], \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} w_j^{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{\Delta t}{\varepsilon}} w_j^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\frac{\Delta t}{\varepsilon}}{1 + \frac{\Delta t}{\varepsilon}} h^+(u_j^{n+1}), \\ z_j^{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{\Delta t}{\varepsilon}} z_j^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\frac{\Delta t}{\varepsilon}}{1 + \frac{\Delta t}{\varepsilon}} h^-(u_j^{n+1}). \end{cases}$$

De (3.24) et (3.25), on obtient

$$\begin{cases} \frac{1}{1 + \frac{\Delta t}{\varepsilon}} h^+(\alpha) + \frac{\frac{\Delta t}{\varepsilon}}{1 + \frac{\Delta t}{\varepsilon}} h^+(\alpha) \leq w_j^{n+1} \leq \frac{1}{1 + \frac{\Delta t}{\varepsilon}} h^+(\beta) + \frac{\frac{\Delta t}{\varepsilon}}{1 + \frac{\Delta t}{\varepsilon}} h^+(\beta), \\ \frac{1}{1 + \frac{\Delta t}{\varepsilon}} h^-(\beta) + \frac{\frac{\Delta t}{\varepsilon}}{1 + \frac{\Delta t}{\varepsilon}} h^-(\beta) \leq z_j^{n+1} \leq \frac{1}{1 + \frac{\Delta t}{\varepsilon}} h^-(\alpha) + \frac{\frac{\Delta t}{\varepsilon}}{1 + \frac{\Delta t}{\varepsilon}} h^-(\alpha), \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} h^+(\alpha) &\leq w_j^{n+1} \leq h^+(\beta), \\ h^-(\beta) &\leq z_j^{n+1} \leq h^-(\alpha), \end{aligned}$$

pour tout $j \in \mathbb{Z}$, ce qui prouve que aussi la propriété 2 est valable pour $n+1$. \square

Soit K un intervalle borné de \mathbb{R} où la condition (3.11) est vérifiée. On suppose que $u_0(x) \in K$, $\forall x \in \mathbb{R}$. On pose

$$C = \max \left\{ \max K, \max h^+(K), \max h^-(K) \right\}.$$

En conséquence du théorème précédent, on peut conclure que la borne suivante pour les suites $(u_j^n)_{j \in \mathbb{Z}}$, $(w_j^n)_{j \in \mathbb{Z}}$, $(z_j^n)_{j \in \mathbb{Z}}$ est valable :

$$\max \left\{ \|u^n\|_\infty, \|w^n\|_\infty, \|z^n\|_\infty \right\} \leq C, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (3.26)$$

où $\|\cdot\|_\infty$ désigne la norme l^∞ usuelle pour une suite discrète. Puisque $v_j^n = \frac{w_j^n + z_j^n}{2}$, on obtient aussi

$$\|v^n\|_\infty \leq C, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

De plus, ces estimations ne dépendent pas de ε .

3.2.3 Estimations de la Variation Totale

On s'attache dans ce paragraphe à montrer une propriété de décroissance de la variation totale pour les suites discrètes (u_j^n, v_j^n) , qui permettra d'établir une estimation de leur variation totale, indépendante du pas de temps Δt et du temps de relaxation ε .

Pour une suite discrète $b = (b_j)_{j \in \mathbb{Z}}$, on définit sa variation totale par

$$VT(b) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} |b_{j+1} - b_j|.$$

Nous utiliserons aussi par la suite la notation classique $\Delta b_{j+\frac{1}{2}}$ pour désigner la différence $b_{j+1} - b_j$. Nous cherchons ainsi à estimer les quantités suivantes :

1. *La variation totale en espace* des suites w_j^n et z_j^n , pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\Delta w_{j+\frac{1}{2}}^n| + \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\Delta z_{j+\frac{1}{2}}^n|;$$

2. *La variation totale en temps*,

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\Delta w_j^{n+\frac{1}{2}}| + \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\Delta z_j^{n+\frac{1}{2}}|,$$

où $\Delta w_j^{n+\frac{1}{2}}$ et $\Delta z_j^{n+\frac{1}{2}}$ désignent respectivement les différences $w_j^{n+1} - w_j^n$ et $z_j^{n+1} - z_j^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall j \in \mathbb{Z}$.

On commence par remarquer deux propriétés élémentaires des fonctions

$$x \in \mathbb{R} \longrightarrow |x|$$

et

$$x \in \mathbb{R} \longrightarrow \operatorname{sgn}(x)$$

qui seront utilisées couramment le long de cette section :

$$(P1) \quad |b| \geq |a| + \operatorname{sgn}(a)(b - a), \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

$$(P2) \quad \operatorname{sgn}(b - a)a \leq \operatorname{sgn}(b)a, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Théorème 3.5.

Soit K un intervalle de \mathbb{R} où la condition sous-caractéristique (3.11) est vérifiée. On suppose aussi la condition de CFL (3.23) et u_0 tel que $u_0(x) \in K$, $\forall x \in \mathbb{R}$, et tel que

$$VT(u_0) < +\infty.$$

Alors, il existe une constante C , qui ne dépend que de $VT(u_0)$, telle que les estimations suivantes sont valables, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$VT(w^n) + VT(z^n) \leq C, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (3.27)$$

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\Delta w_j^{n+\frac{1}{2}}| + |\Delta z_j^{n+\frac{1}{2}}| \leq C, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.28)$$

Démonstration.

On commence par remarquer que, si $VT(u_0) \leq C$ et $u_j^0 \in K$, $\forall j \in \mathbb{Z}$, alors $VT(v_0) \leq aC$. En effet, d'après la condition sous-caractéristique (3.11), on a

$$VT(v_0) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} |v_{j+1}^0 - v_j^0| = \sum_{j \in \mathbb{Z}} |f(v_{j+1}^0) - f(v_j^0)| \leq a \sum_{j \in \mathbb{Z}} |v_{j+1}^0 - v_j^0| = aVT(u_0).$$

Par conséquent, on a aussi $VT(w_0) \leq 2aC$, $VT(z_0) \leq 2aC$.

Nous faisons la preuve du théorème en deux étapes. D'abord nous prouvons l'estimation en espace (3.27) et ensuite l'estimation en temps (3.28).

1ère étape : Preuve de (3.27).

D'après (3.21), on a

$$\begin{aligned} w_{j+1}^{n+1} - w_j^{n+1} &= (w_{j+1}^n - w_j^n) \\ &\quad - a \frac{\Delta t}{\Delta x} (w_{j+1}^n - w_j^n - (w_j^n - w_{j-1}^n)) + \frac{\Delta t}{\varepsilon} [f(u_{j+1}^{n+1}) - f(u_j^{n+1}) - (v_{j+1}^{n+1} - v_j^{n+1})], \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} \Delta w_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} &= \Delta w_{j+\frac{1}{2}}^n - a \frac{\Delta t}{\Delta x} (\Delta w_{j+\frac{1}{2}}^n - \Delta w_{j-\frac{1}{2}}^n) + \frac{\Delta t}{\varepsilon} (\Delta f_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - \Delta v_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}) \\ &= \left(1 - a \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) \Delta w_{j+\frac{1}{2}}^n + a \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta w_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\Delta t}{\varepsilon} (\Delta f_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - \Delta v_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}). \end{aligned} \quad (3.29)$$

On obtient alors

$$\left| \Delta w_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - \frac{\Delta t}{\varepsilon} (\Delta f_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - \Delta v_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}) \right| = \left| \left(1 - a \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) \Delta w_{j+\frac{1}{2}}^n + a \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta w_{j-\frac{1}{2}}^n \right|.$$

Or, d'une part, d'après la condition CFL (3.23), on a

$$\left| \left(1 - a \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) \Delta w_{j+\frac{1}{2}}^n + a \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta w_{j-\frac{1}{2}}^n \right| \leq \left(1 - a \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) |\Delta w_{j+\frac{1}{2}}^n| + a \frac{\Delta t}{\Delta x} |\Delta w_{j-\frac{1}{2}}^n|.$$

D'une autre part, en appliquant (P1), on obtient

$$\left| \Delta w_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - \frac{\Delta t}{\varepsilon} (\Delta f_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - \Delta v_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}) \right| \geq |\Delta w_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}| + \text{sgn}(\Delta w_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}) \left(-\frac{\Delta t}{\varepsilon} (\Delta f_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - \Delta v_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}) \right).$$

On peut donc conclure que

$$\begin{aligned} & |\Delta w_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}| \leq \\ & \left(1 - a \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) |\Delta w_{j+\frac{1}{2}}^n| + a \frac{\Delta t}{\Delta x} |\Delta w_{j-\frac{1}{2}}^n| + \frac{\Delta t}{\varepsilon} \operatorname{sgn}(\Delta w_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}) (\Delta f_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - \Delta v_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}). \end{aligned} \quad (3.30)$$

En raisonnant de manière analogue pour la variable z , on obtient

$$\Delta z_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} = \left(1 - a \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) \Delta z_{j+\frac{1}{2}}^n + a \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta z_{j+\frac{3}{2}}^n + \frac{\Delta t}{\varepsilon} (\Delta f_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - \Delta v_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}), \quad (3.31)$$

d'où l'on conclut

$$\begin{aligned} & |\Delta z_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}| \leq \\ & \left(1 - a \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) |\Delta z_{j+\frac{1}{2}}^n| + a \frac{\Delta t}{\Delta x} |\Delta z_{j+\frac{3}{2}}^n| + \frac{\Delta t}{\varepsilon} \operatorname{sgn}(\Delta z_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}) (\Delta f_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - \Delta v_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Si on ajoute (3.30) et (3.32), on obtient

$$\begin{aligned} & |\Delta w_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}| + |\Delta z_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}| \\ & \leq |\Delta w_{j+\frac{1}{2}}^n| + |\Delta z_{j+\frac{1}{2}}^n| + a \frac{\Delta t}{\Delta x} (|\Delta w_{j-\frac{1}{2}}^n| - |\Delta w_{j+\frac{1}{2}}^n| + |\Delta z_{j+\frac{3}{2}}^n| - |\Delta z_{j+\frac{1}{2}}^n|) \\ & \quad + \frac{\Delta t}{\varepsilon} \left(\operatorname{sgn}(\Delta z_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}) + \operatorname{sgn}(\Delta w_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}) \right) (\Delta f_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - \Delta v_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}). \end{aligned} \quad (3.33)$$

On majore le dernier terme dans l'inégalité ci-dessus. Pour simplifier les notations, on omettra pour l'instant les indices $n+1$ et $j+\frac{1}{2}$. On veut donc estimer

$$\frac{\Delta t}{\varepsilon} (\operatorname{sgn}(\Delta z) + \operatorname{sgn}(\Delta w)) (\Delta f - \Delta v).$$

Or en appliquant la propriété (P2) on a, d'une part,

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(\Delta w) (\Delta f - \Delta v) &= \operatorname{sgn}(\Delta v + a\Delta u) (\Delta f - \Delta v) \\ &= \operatorname{sgn}(\Delta f + a\Delta u - (\Delta f - \Delta v)) (\Delta f - \Delta v) \\ &\leq \operatorname{sgn}(\Delta f + a\Delta u) (\Delta f - \Delta v) \end{aligned}$$

et, d'autre part,

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(\Delta z) (\Delta f - \Delta v) &= \operatorname{sgn}(\Delta v - a\Delta u) (\Delta f - \Delta v) \\ &= \operatorname{sgn}(\Delta f - a\Delta u - (\Delta f - \Delta v)) (\Delta f - \Delta v) \\ &\leq \operatorname{sgn}(\Delta f - a\Delta u) (\Delta f - \Delta v). \end{aligned}$$

Puisque

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(u_{j+1}^{n+1}) - f(u_j^{n+1}) = f'(\xi) (u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}) \\ &= f'(\xi) \Delta u, \end{aligned}$$

avec ξ entre u_{j+1}^{n+1} et u_j^{n+1} , on déduit que, la condition sous-caractéristique (3.11) étant vérifiée,

$$\left| \frac{\Delta f}{\Delta u} \right| < a.$$

Cette inégalité implique que $\Delta f + a\Delta u$ et $\Delta f - a\Delta u$ ont des signes contraires et donc

$$\begin{aligned} & \left(\operatorname{sgn}(\Delta z) + \operatorname{sgn}(\Delta w) \right) (\Delta f - \Delta v) \\ & \leq \left(\operatorname{sgn}(\Delta f + a\Delta u) + \operatorname{sgn}(\Delta f - a\Delta u) \right) (\Delta f - \Delta v) = 0. \end{aligned}$$

De (3.33), on obtient alors

$$\begin{aligned} & \left| \Delta w_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} \right| + \left| \Delta z_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} \right| \leq \\ & \leq \left| \Delta w_{j+\frac{1}{2}}^n \right| + \left| \Delta z_{j+\frac{1}{2}}^n \right| + a \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\left| \Delta w_{j-\frac{1}{2}}^n \right| - \left| \Delta w_{j+\frac{1}{2}}^n \right| + \left| \Delta z_{j+\frac{3}{2}}^n \right| - \left| \Delta z_{j+\frac{1}{2}}^n \right| \right). \end{aligned} \quad (3.34)$$

On peut alors conclure que, si

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| \Delta w_{j+\frac{1}{2}}^n \right| + \left| \Delta z_{j+\frac{1}{2}}^n \right| < +\infty,$$

alors on a

$$\lim_{j \rightarrow \pm\infty} \left| \Delta w_{j+\frac{1}{2}}^n \right| = \lim_{j \rightarrow \pm\infty} \left| \Delta z_{j+\frac{1}{2}}^n \right| = 0,$$

et le dernier terme dans le membre de droite de l'inégalité (3.34) est sommable, sa somme étant égale à 0, et par conséquent

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| \Delta w_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} \right| + \left| \Delta z_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} \right| \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| \Delta w_{j+\frac{1}{2}}^n \right| + \left| \Delta z_{j+\frac{1}{2}}^n \right|.$$

Si l'on raisonne par récurrence, on obtient que

$$\begin{aligned} VT(w^n) + VT(z^n) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| \Delta w_{j+\frac{1}{2}}^n \right| + \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| \Delta z_{j+\frac{1}{2}}^n \right| \\ &\leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| \Delta w_{j+\frac{1}{2}}^0 \right| + \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| \Delta z_{j+\frac{1}{2}}^0 \right| = VT(w_0) + VT(z_0), \end{aligned}$$

pourvu que $VT(w_0) + VT(z_0)$ soit fini, ce qui prouve (3.27).

2ème étape : Preuve de (3.28).

D'après (3.21), on a

$$\begin{aligned} \Delta w_j^{n+\frac{1}{2}} &= \Delta w_j^{n-\frac{1}{2}} \left(1 - a \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) + a \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta w_{j-1}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{\varepsilon} \left(\Delta f_j^{n+\frac{1}{2}} - \Delta v_j^{n+\frac{1}{2}} \right), \\ \Delta z_j^{n+\frac{1}{2}} &= \Delta z_j^{n-\frac{1}{2}} \left(1 - a \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) + a \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta z_{j+1}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{\varepsilon} \left(\Delta f_j^{n+\frac{1}{2}} - \Delta v_j^{n+\frac{1}{2}} \right), \end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \left| \Delta w_j^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{\varepsilon} (\Delta f_j^{n+\frac{1}{2}} - \Delta v_j^{n+\frac{1}{2}}) \right| &\leq \left| \Delta w_j^{n-\frac{1}{2}} \right| \left(1 - a \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) + a \frac{\Delta t}{\Delta x} \left| w_{j-1}^{n-\frac{1}{2}} \right|, \\ \left| \Delta z_j^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{\varepsilon} (\Delta f_j^{n+\frac{1}{2}} - \Delta v_j^{n+\frac{1}{2}}) \right| &\leq \left| \Delta z_j^{n-\frac{1}{2}} \right| \left(1 - a \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) + a \frac{\Delta t}{\Delta x} \left| z_{j+1}^{n-\frac{1}{2}} \right|. \end{aligned} \quad (3.35)$$

En raisonnant de la même manière que dans la preuve de l'estimation (3.27), on obtient alors, d'une part,

$$\left| \Delta w - \frac{\Delta t}{\varepsilon} (\Delta f - \Delta v) \right| \geq |\Delta w| + \frac{\Delta t}{\varepsilon} (\Delta v - \Delta f) \operatorname{sgn}((f' + a)\Delta u)$$

et, d'autre part,

$$\left| \Delta z - \frac{\Delta t}{\varepsilon} (\Delta f - \Delta v) \right| \geq |\Delta z| + \frac{\Delta t}{\varepsilon} (\Delta v - \Delta f) \operatorname{sgn}((f' - a)\Delta u),$$

où l'on a omis les indices attachés aux quantités pour alléger les notations. D'après la condition sous-caractéristique (3.11), les signes de $f' + a$ et de $f' - a$ sont contraires, et on déduit comme dans la preuve de (3.27) que

$$|\Delta w| + |\Delta z| \leq \left| \Delta w - \frac{\Delta t}{\varepsilon} (\Delta f - \Delta v) \right| + \left| \Delta z - \frac{\Delta t}{\varepsilon} (\Delta f - \Delta v) \right|.$$

En retournant aux inégalités (3.35), on obtient alors

$$\begin{aligned} |\Delta w_j^{n+\frac{1}{2}}| + |\Delta z_j^{n+\frac{1}{2}}| &\leq \\ |\Delta w_j^{n-\frac{1}{2}}| + |\Delta z_j^{n-\frac{1}{2}}| &+ a \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(|\Delta w_{j-1}^{n-\frac{1}{2}}| - |\Delta w_j^{n-\frac{1}{2}}| \right) + a \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(|\Delta z_{j+1}^{n-\frac{1}{2}}| - |\Delta z_j^{n-\frac{1}{2}}| \right). \end{aligned}$$

On effectue maintenant la somme pour $j \in \mathbb{Z}$. En raisonnant par récurrence, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\Delta w_j^{n+\frac{1}{2}}| + |\Delta z_j^{n+\frac{1}{2}}| &\leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\Delta w_j^{n-\frac{1}{2}}| + |\Delta z_j^{n-\frac{1}{2}}| \\ &\leq \dots \\ &\leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\Delta w_j^{\frac{1}{2}}| + |\Delta z_j^{\frac{1}{2}}|, \end{aligned} \quad (3.36)$$

pourvu que cette dernière quantité soit finie. Or on a

$$\begin{aligned} \Delta w_j^{\frac{1}{2}} &= w_j^1 - w_j^0 = -a \frac{\Delta t}{\Delta x} (w_j^0 - w_{j-1}^0) + \frac{\Delta t}{\varepsilon} (f_j^1 - v_j^1) \\ &= -a \frac{\Delta t}{\Delta x} (w_j^0 - w_j^0) + \frac{\Delta t}{\varepsilon} (\Delta f_j^{\frac{1}{2}} - \Delta v_j^{\frac{1}{2}}), \end{aligned}$$

et

$$\Delta z_j^{\frac{1}{2}} = z_j^1 - z_j^0 = a \frac{\Delta t}{\Delta x} (z_{j+1}^0 - z_j^0) + \frac{\Delta t}{\varepsilon} (\Delta f_j^{\frac{1}{2}} - \Delta v_j^{\frac{1}{2}}),$$

puisque $v_j^0 = f_j^0$. On en déduit comme précédemment

$$\begin{aligned} |\Delta w_j^{\frac{1}{2}}| + |\Delta z_j^{\frac{1}{2}}| &\leq \left| \Delta w_j^{\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{\varepsilon} (\Delta f_j^1 - \Delta v_j^1) \right| + \left| \Delta z_j^{\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{\varepsilon} (\Delta f_j^1 - \Delta v_j^1) \right| \\ &\leq a \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(|z_{j+1}^0 - z_j^0| + |w_j^0 - w_{j-1}^0| \right), \end{aligned}$$

et donc, si l'on somme sur $j \in \mathbb{Z}$ les membres de gauche et de droite de l'inégalité ci-dessus, on obtient

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\Delta w_j^{\frac{1}{2}}| + |\Delta z_j^{\frac{1}{2}}| \leq VT(w_0) + VT(z_0).$$

De l'inégalité (3.36) on conclut

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\Delta w_j^{n+\frac{1}{2}}| + |\Delta z_j^{n+\frac{1}{2}}| \leq VT(w_0) + VT(z_0),$$

ce qui prouve (3.28). \square

Comme conséquence du théorème précédent, on obtient aussi une estimation de la variation totale des suites u^n et v^n . En effet, on a, d'une part,

$$|\Delta w| + |\Delta z| = |\Delta v + a\Delta u| + |\Delta v - a\Delta u| \geq |\Delta v + a\Delta u + \Delta v - a\Delta u| = 2|\Delta v|,$$

et, d'autre part,

$$|\Delta w| + |\Delta z| \geq |\Delta v + a\Delta u - \Delta v + a\Delta u| = 2a|\Delta u|.$$

On obtient alors

$$VT(u^n) \leq \frac{1}{2a} (VT(w^n) + VT(z^n)), \quad VT(v^n) \leq \frac{1}{2} (VT(w^n) + VT(z^n)),$$

et, de manière analogue,

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\Delta u_j^{n+\frac{1}{2}}| \leq \frac{1}{2a} \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\Delta w_j^{n+\frac{1}{2}}| + |\Delta z_j^{n+\frac{1}{2}}|, \quad \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\Delta v_j^{n+\frac{1}{2}}| \leq \frac{1}{2} \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\Delta w_j^{n+\frac{1}{2}}| + |\Delta z_j^{n+\frac{1}{2}}|.$$

3.2.4 Convergence du schéma numérique, lorsque $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$, vers une solution du système de relaxation

Comme conséquence des estimations obtenues aux paragraphes précédents, nous sommes en mesure de prouver la convergence du schéma numérique défini par (3.21) ou, de manière équivalente, par (3.22). Dans un premier temps, on s'intéresse, pour $\varepsilon > 0$ fixé, à la convergence des solutions approchées $((u_\varepsilon)_\Delta, (v_\varepsilon)_\Delta)$ vers la solution $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$ du système de relaxation (3.1), lorsque le pas du maillage, tend vers 0. Pour ce faire, nous allons utiliser la compacité des suites approchées dans l'espace des fonctions à variation bornée.

On commence par rappeler un résultat de compacité classique dans l'espace des fonctions à variation bornée. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 . On rappelle d'abord que, pour $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, la variation totale de f sur Ω est définie par

$$VT_{\Omega}(f) = \sup_{\substack{\varphi \in C^1_0(\Omega) \\ \|\varphi\|_{\infty} \leq 1}} \int_{\Omega} f \operatorname{div} \varphi$$

et

$$BV(\Omega) = \{f \in L^1_{loc}(\Omega) : VT_{\Omega}(f) < +\infty\}$$

On va considérer l'espace $L^{\infty}(\Omega) \cap BV(\Omega)$, qui est un espace de Banach pour la norme

$$\|f\| = \|f\|_{L^{\infty}} + VT(f).$$

Théorème de Helly.

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n , de frontière lipschitzienne. Si $(u_k)_k$ est une suite de fonctions telle que

$$\|u_k\|_{L^{\infty}(\Omega)} + VT(u_k) \leq C,$$

alors il existe $u \in BV(\Omega)$ tel que

$$\begin{cases} u_k \rightarrow u \text{ } L^1_{loc}(\Omega) \text{ et p.p. } x \in \Omega, \\ VT(u) \leq \liminf_k VT(u_k). \end{cases}$$

Le but de ce paragraphe est de prouver le résultat suivant :

Théorème 3.6.

Soit $u_0 \in BV(\mathbb{R})$ tel que $u_0(x) \in K$, $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$ fixé. Supposons que $v_0(x) = f(u_0)(x)$. Alors il existe des sous-suites $(u_{\Delta})_{\Delta}$, $(v_{\Delta})_{\Delta}$ et des fonctions

$$u, v \in L^{\infty}(\mathbb{R} \times [0, +\infty[) \cap BV(\mathbb{R} \times [0, T]) \cap L^1_{loc}(\mathbb{R} \times [0, +\infty[),$$

pour tout $T > 0$, et tels que $\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, t)$, $\frac{\partial v}{\partial t}(\cdot, t)$ sont uniformément bornés comme mesures finies, tels que

$$(u_{\Delta}, v_{\Delta}) \longrightarrow (u, v) \text{ } L^1_{loc}(\mathbb{R} \times [0, +\infty[)^2,$$

si $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$, $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ étant constant. Le couple (u, v) est solution, dans l'ensemble $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$, du problème de Cauchy (3.1)-(3.2).

Démonstration.

D'après les théorèmes 3.4 et 3.5, on obtient que les suites u_{Δ} et v_{Δ} définies par (3.20) sont uniformément bornées dans $L^{\infty}(\mathbb{R} \times [0, +\infty[)$ et que

$$VT(u_{\Delta}(\cdot, t)) \leq C, \quad VT(v_{\Delta}(\cdot, t)) \leq C, \quad \forall t > 0.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{u_\Delta(\cdot, t + \Delta t) - u_\Delta(\cdot, t)}{\Delta t} \right\|_{L^1(\mathbb{R})} &= \frac{1}{\Delta t} \int_{\mathbb{R}} |u_\Delta(x, t + \Delta t) - u_\Delta(x, t)| dx \\
&= \frac{1}{\Delta t} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{x_j}^{x_{j+1}} |u_j^{n+1} - u_j^n| dx \\
&= \frac{\Delta x}{\Delta t} \sum_{j \in \mathbb{Z}} |u_j^{n+1} - u_j^n| \\
&\leq C VT(u_0),
\end{aligned}$$

d'après (3.28), et on peut établir un résultat analogue pour la suite v_Δ . On a donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \|(u_\Delta, v_\Delta)\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times [0, +\infty])^2} \leq C, \\ VT(u_\Delta(\cdot, t)), VT(v_\Delta(\cdot, t)) \leq C, \\ \left\| \left(\frac{u_\Delta(\cdot, t + \Delta t) - u_\Delta(\cdot, t)}{\Delta t}, \frac{v_\Delta(\cdot, t + \Delta t) - v_\Delta(\cdot, t)}{\Delta t} \right) \right\|_{L^1(\mathbb{R})^2} \leq C, \end{array} \right. \quad (3.37)$$

où la constante C ne dépend ni de Δt , ni de Δx , $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ étant constant. Ces estimations impliquent, en particulier, que les suites u_Δ et v_Δ sont uniformément bornées dans $BV(\Omega)$, pour tout ouvert Ω contenu dans un compact K de la forme $[-M, M] \times [0, T]$. En effet, si K est un tel compact, on peut considérer, pour chaque Δx , $\Delta t > 0$, des entiers $J \in \mathbb{Z}$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que $K \subseteq [-J\Delta x, J\Delta x] \times [0, N\Delta t]$, et on obtient

$$VT_\Omega(u_\Delta) \leq \Delta t \sum_{n=0}^N \sum_{j=-J}^J |u_j^n - u_{j-1}^n| + \Delta x \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{j=-J}^J |u_j^{n+1} - u_j^n| + \Delta x \sum_{j=-J}^J |u_j^0|.$$

Il est alors immédiat de conclure, d'après (3.37), que $VT_\Omega(v_\Delta)$ est bornée indépendamment de Δt et de Δx . On peut raisonner de manière analogue pour conclure que $VT_\Omega(v_\Delta)$ est aussi borné. D'après le théorème de Helly, on peut donc en conclure l'existence d'une sous-suite $(u_{\Delta k}, v_{\Delta k})_k$ de (u_Δ, v_Δ) et d'un couple $(u, v) \in BV(\Omega)$ tels que

$$(u_{\Delta k}, v_{\Delta k}) \longrightarrow (u, v), \quad L^1_{loc}(\Omega)$$

et p. p. $x \in \Omega$, lorsque $\Delta t_k, \Delta x_k \rightarrow 0$, $a \frac{\Delta t_k}{\Delta x_k} \leq 1$. Par une extraction diagonale, on déduit l'existence d'une sous-suite de (u_Δ, v_Δ) convergeant vers un couple de fonctions $(u, v) \in BV(\mathbb{R} \times [0, +\infty])^2 \cap L^1_{loc}(\mathbb{R} \times [0, +\infty])^2$. Le fait que $\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, t)$ et $\frac{\partial v}{\partial t}(\cdot, t)$ soient des mesures bornées est une conséquence de la dernière inégalité de (3.37).

On s'attache maintenant à prouver que le couple (u, v) est une solution du problème de Cauchy (3.1)-(3.2). Pour cela, on considère $\varphi \in C^1_0(\mathbb{R} \times [0, +\infty])$. On définit la fonction φ_Δ sur $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$ par

$$\varphi_\Delta(x, t) = \varphi_j^n, \quad \text{si } (x, t) \in [x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}] \times [t^n, t^{n+1}[,$$

où $\varphi_j^n := \varphi(x_j, t^n)$. On multiplie les deux membres des deux équations de (3.21) par $\Delta t \Delta x \varphi_j^n$ et on somme sur $n \geq 0$ et sur $j \in \mathbb{Z}$. On obtient, pour la première équation,

$$\begin{aligned} \Delta t \Delta x \sum_{n \geq 0} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{w_j^{n+1} - w_j^n}{\Delta t} \varphi_j^n \\ + a \Delta t \Delta x \sum_{n \geq 0} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{w_j^n - w_{j-1}^n}{\Delta x} \varphi_j^n = \frac{\Delta t \Delta x}{\varepsilon} \sum_{n \geq 0} \sum_{j \in \mathbb{Z}} (f_j^{n+1} - v_j^{n+1}) \varphi_j^n, \end{aligned} \quad (3.38)$$

soit

$$\begin{aligned} \Delta t \Delta x \sum_{n \geq 1} \sum_{j \in \mathbb{Z}} w_j^n \frac{\varphi_j^{n-1} - \varphi_j^n}{\Delta t} - \Delta x \sum_{j \in \mathbb{Z}} w_j^0 \varphi_j^0 \\ + a \Delta t \Delta x \sum_{n \geq 0} \sum_{j \in \mathbb{Z}} w_j^n \frac{\varphi_j^n - \varphi_{j+1}^n}{\Delta x} = \frac{\Delta t \Delta x}{\varepsilon} \sum_{n \geq 0} \sum_{j \in \mathbb{Z}} (f_j^{n+1} - v_j^{n+1}) \varphi_j^n, \end{aligned}$$

L'équation ci-dessus s'écrit sous la forme intégrale

$$\begin{aligned} \int_{\Delta t}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} w_{\Delta}(x, t) \frac{\varphi_{\Delta}(x, t - \Delta t) - \varphi_{\Delta}(x, t)}{\Delta t} dx dt - \int_{\mathbb{R}} w_{\Delta}(x, 0^+) \varphi_{\Delta}(x, 0^+) dx \\ + a \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} w_{\Delta}(x, t) \frac{\varphi_{\Delta}(x, t) - \varphi_{\Delta}(x + \Delta x, t)}{\Delta x} \\ = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} (f(u_{\Delta}(x, t + \Delta t)) - v_{\Delta}(x, t + \Delta t)) \varphi_{\Delta}(x, t) dx dt. \end{aligned}$$

On passe maintenant à la limite, lorsque Δt et $\Delta x \rightarrow 0$, dans l'égalité précédente. On obtient

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} (w \varphi_t + a w \varphi_x) dx dt + \int_{\mathbb{R}} w_0(x) \varphi(x, 0) dx = -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} (f(u) - v) \varphi(x, t) dx dt. \quad (3.39)$$

En raisonnant de manière analogue, on obtient aussi

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} (z \varphi_t - a z \varphi_x) dx dt + \int_{\mathbb{R}} z_0(x) \varphi(x, 0) dx = -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} (f(u) - v) \varphi(x, t) dx dt. \quad (3.40)$$

Pour obtenir les équations vérifiées par u et v , on fait la différence entre (3.39) et (3.40) et on divise par $2a$, pour u , et on fait leur somme et on divise par 2, pour v . On obtient ainsi que le couple (u, v) est une solution faible du problème de Cauchy (3.1)-(3.2). \square

3.2.5 Convergence lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$

Nous nous intéressons ici à la convergence du schéma numérique lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$. Puisque les estimations de la norme L^∞ et de la variation totale des suites approchées que nous avons obtenues sont indépendantes de ε , nous pourrions conclure, comme au paragraphe précédent, l'existence d'une borne de la variation totale uniforme en ε pour

les suites approchées et utiliser le résultat de compacité donné par le théorème de Helly. Notre but est de montrer que la limite (u, v) des suites approchées, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, est telle que u est la solution faible entropique de la loi de conservation scalaire (3.15) et $v = f(u)$. Pour ce faire, il s'avère nécessaire d'étudier la limite au niveau discret, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, du terme source $f(u) - v$. Le lemme suivant établit une estimation de la norme L^1 discrète de ce terme.

Lemme 3.3.

On suppose vérifiées les conditions sous-caractéristique (3.11) et CFL (3.23). Alors on a, pour tout $t > 0$,

$$\|f(u_\Delta^\varepsilon)(\cdot, t) - v_\Delta^\varepsilon(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \varepsilon C, \quad (3.41)$$

où la constante C ne dépend ni de Δt ni de Δx .

Démonstration.

Il s'agit d'estimer, pour chaque $n \in \mathbb{N}$,

$$\Delta x \sum_{j \in \mathbb{Z}} |f(u_j^n) - v_j^n|.$$

Pour ce faire, on remarque que, de (3.21) on obtient

$$\begin{aligned} f(u_j^{n+1}) - v_j^{n+1} &= f\left(\frac{w_j^{n+1} - z_j^{n+1}}{2a}\right) - \frac{w_j^{n+1} + z_j^{n+1}}{2} \\ &= f\left(\frac{w_j^n - z_j^n}{2a} - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(w_j^n - w_{j-1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x}(z_{j+1}^n - z_j^n)\right) \\ &\quad - \frac{w_j^n + z_j^n}{2} + \frac{a\Delta t}{2\Delta x}(w_j^n - w_{j-1}^n) - \frac{a\Delta t}{2\Delta x}(z_{j+1}^n - z_j^n) - \frac{\Delta t}{\varepsilon}(f(u_j^{n+1}) - v_j^{n+1}) \\ &= f(u_j^n) - v_j^n + \left(a - f'(\xi_j^{n+\frac{1}{2}})\right) \frac{\Delta t}{2\Delta x}(w_j^n - w_{j-1}^n) \\ &\quad - \left(a + f'(\xi_j^{n+\frac{1}{2}})\right) \frac{\Delta t}{2\Delta x}(z_{j+1}^n - z_j^n) - \frac{\Delta t}{\varepsilon}(f(u_j^{n+1}) - v_j^{n+1}), \end{aligned}$$

avec $\xi_j^{n+\frac{1}{2}}$ entre u_j^n et u_j^{n+1} . On en déduit

$$\left(1 + \frac{\Delta t}{\varepsilon}\right) |f(u_j^{n+1}) - v_j^{n+1}| \leq |f(u_j^n) - v_j^n| + a \frac{\Delta t}{\Delta x} (|w_j^n - w_{j-1}^n| + |z_{j+1}^n - z_j^n|).$$

On effectue maintenant la somme, pour j sur \mathbb{Z} , des deux membres de l'inégalité ci-dessus. On obtient alors, en utilisant l'estimation (3.27), que

$$\left(1 + \frac{\Delta t}{\varepsilon}\right) \sum_{j \in \mathbb{Z}} |f(u_j^{n+1}) - v_j^{n+1}| \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} |f(u_j^n) - v_j^n| + 2a \frac{\Delta t}{\Delta x} VT(u_0). \quad (3.42)$$

À ce stade, on pose, pour chaque $n \in \mathbb{N}$,

$$A_n = \sum_{j \in \mathbb{Z}} |f(u_j^n) - v_j^n|$$

et α et C les constantes

$$\alpha = \left(1 + \frac{\Delta t}{\varepsilon}\right), \quad C = 2a \frac{\Delta t}{\Delta x} VT(u_0).$$

Avec ces notations, (3.42) s'écrit

$$A_{n+1} \leq \frac{1}{\alpha} A_n + \frac{1}{\alpha} C$$

et, en raisonnant par récurrence, il est alors facile de vérifier que

$$A_{n+1} \leq A_0 \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{n+1} + C \sum_{p=1}^{n+1} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^p.$$

Comme $A_0 = \sum_{j \in \mathbb{Z}} |f(u_j^0) - v_j^0|$ et la condition initiale est à l'équilibre, on a $A_0 = 0$.

D'autre part, on a $\alpha > 1$, donc $0 < \frac{1}{\alpha} < 1$ et

$$\sum_{p=1}^{n+1} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^p = \frac{1}{\alpha} \frac{1 - \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{\alpha}} \leq \frac{1}{\alpha - 1} = \frac{1}{\frac{\Delta t}{\varepsilon}} = \frac{\varepsilon}{\Delta t}.$$

On obtient ainsi $A_{n+1} \leq \frac{\varepsilon}{\Delta t} C$, c'est-à-dire

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} |f(u_j^{n+1}) - v_j^{n+1}| \leq 2a \frac{\varepsilon}{\Delta t} \frac{\Delta t}{\Delta x} VT(u_0)$$

et donc

$$\Delta x \sum_{j \in \mathbb{Z}} |f(u_j^{n+1}) - v_j^{n+1}| \leq 2a VT(u_0) \varepsilon,$$

ce qui prouve le résultat du lemme. \square

On est maintenant en mesure d'établir la convergence du schéma de relaxation (3.22) vers l'équilibre, lorsque le temps de relaxation $\varepsilon \rightarrow 0$.

Théorème 3.7.

Soit $u_0 \in BV(\mathbb{R})$ tel que $u_0(x) \in K$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Supposons que la condition (3.11) est vérifiée. Alors il existe des sous-suites $(u_\Delta^\varepsilon, v_\Delta^\varepsilon)_{\varepsilon, \Delta}$ et une fonction

$$u \in L^\infty(\mathbb{R} \times [0, +\infty]) \cap BV(\mathbb{R} \times [0, T]) \cap L_{loc}^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty]),$$

pour tout $T > 0$, telles que

$$\begin{cases} u_\Delta^\varepsilon \longrightarrow u & L_{loc}^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty]) \\ v_\Delta^\varepsilon \longrightarrow f(u) & L^\infty([0, T]; L_{loc}^1(\mathbb{R})), \end{cases}$$

lorsque ε , Δt et $\Delta x \rightarrow 0$. La fonction u est l'unique solution entropique du problème de Cauchy pour la loi de conservation (3.15), de donnée initiale u_0 .

Démonstration.

1ère étape : Convergence du schéma numérique vers une solution faible de (3.15).

L'estimation (3.37) reste valable ici et la constante C ne dépend pas de ε . On conclut alors de la même manière qu'il existe un couple de fonctions (u, v) tel que

$$(u_\Delta^\varepsilon, v_\Delta^\varepsilon) \longrightarrow (u, v),$$

lorsque $\varepsilon, \Delta t, \Delta x \rightarrow 0$, la convergence étant valable dans le même sens qu'au théorème 3.6. Or d'après le lemme 3.3, on peut maintenant conclure que

$$\sup_{\Delta t, \Delta x} \|f(u_\Delta^\varepsilon) - v_\Delta^\varepsilon\|_{L^\infty([0, T]; L^1_{loc}(\mathbb{R}))} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0,$$

et donc

$$\lim_{\varepsilon, \Delta t, \Delta x \rightarrow 0} f(u_\Delta^\varepsilon) - v_\Delta^\varepsilon = 0,$$

dans $L^\infty([0, T]; L^1_{loc}(\mathbb{R}))$ et p.p. $x \in \mathbb{R}$, pour tout $t > 0$. Comme $(u_\Delta^\varepsilon, v_\Delta^\varepsilon) \longrightarrow (u, v)$, on obtient $f(u) = v$, p.p. $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $t > 0$.

On procède maintenant comme dans la preuve du théorème 3.6 pour montrer que u est une solution faible de (3.15). On considère $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R} \times [0, +\infty[)$, on multiplie les deux membres de la première équation de (3.22) par $\Delta t \Delta x \varphi_j^n$ et on somme ensuite sur $n \in \mathbb{N}$ et $j \in \mathbb{Z}$. On obtient

$$\begin{aligned} & \Delta t \Delta x \sum_{n \geq 1} \sum_{j \in \mathbb{Z}} u_j^n \frac{\varphi_j^{n-1} - \varphi_j^n}{\Delta t} \\ & - \Delta x \sum_{j \in \mathbb{Z}} u_j^0 \varphi_j^0 + \Delta t \Delta x \sum_{n \geq 0} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(v_j^n \frac{\varphi_{j-1}^n - \varphi_j^n}{2\Delta x} + v_j^n \frac{\varphi_j^n - \varphi_{j+1}^n}{2\Delta x} \right) \\ & - a \Delta t \Delta x \sum_{n \geq 0} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(u_j^n \frac{\varphi_{j-1}^n - \varphi_j^n}{2\Delta x} - u_j^n \frac{\varphi_j^n - \varphi_{j+1}^n}{2\Delta x} \right) = 0, \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} & \int_{\Delta t}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} u_\Delta(x, t) \frac{\varphi_\Delta(x, t - \Delta t) - \varphi_\Delta(x, t)}{\Delta t} - \int_{\mathbb{R}} u_\Delta(x, t)(x, 0^+) \varphi_\Delta(x, 0^+) \\ & + \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} v_\Delta(x, t) \frac{\varphi_\Delta(x - \Delta x, t) - \varphi_\Delta(x, t)}{2\Delta x} + v_\Delta(x, t) \frac{\varphi_\Delta(x, t) - \varphi_\Delta(x + \Delta x, t)}{2\Delta x} \\ & - a \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} u_\Delta(x, t) \frac{\varphi_\Delta(x - \Delta x, t) - \varphi_\Delta(x, t)}{2\Delta x} - u_\Delta(x, t) \frac{\varphi_\Delta(x, t) - \varphi_\Delta(x + \Delta x, t)}{2\Delta x} = 0. \end{aligned}$$

On passe à la limite, dans l'égalité ci-dessus lorsque $\varepsilon, \Delta t, \Delta x \rightarrow 0$. Comme le terme de la dernière ligne tend vers 0, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \left(u \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f(u) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dx dt + \int_{\mathbb{R}} u_0(x) \varphi(x, 0) dx = 0,$$

et u est donc une solution faible de l'équation scalaire (3.15).

2ème étape : La solution limite vérifie les inégalités d'entropie

On s'intéresse maintenant à prouver que u est l'unique solution entropique de (3.15). Pour ce faire on considère (η, q) un couple entropie-flux d'entropie pour (3.15), avec η strictement convexe. On considère (E, F) le correspondant couple entropique pour le système de relaxation, donné par

$$E(u, v) = e^+(w) - e^-(z), \quad F(u, v) = ae^+(w) + ae^-(z).$$

On pose

$$E_j^n = E(u_j^n, v_j^n) = e^+(w_j^n) - e^-(z_j^n)$$

et

$$F_{j+\frac{1}{2}}^n = ae^+(w_j^n) + ae^-(z_{j+1}^n),$$

où $e^+(w)$ et $e^-(z)$ sont données par (3.17) (remarquons que, d'après le théorème 3.4, on a bien $w_j^n \in h^+(K)$ et $z_j^n \in h^-(K)$). On remarque d'abord que l'on a

$$(e^+)'(w) = \frac{1}{2a}\eta'((h^+)^{-1}(w)), \quad (e^-)'(z) = \frac{1}{2a}\eta'((h^-)^{-1}(z))$$

et donc

$$(e^+)''(w) = \frac{\eta''((h^+)^{-1}(w))}{(f' + a)((h^+)^{-1}(w))} > 0, \quad \forall w,$$

$$(e^-)''(z) = \frac{\eta''((h^-)^{-1}(z))}{(f' - a)((h^-)^{-1}(z))} < 0, \quad \forall z.$$

On obtient que

$$\begin{aligned} & \frac{E_j^{n+1} - E_j^n}{\Delta t} + \frac{Q_{j+\frac{1}{2}}^n - Q_{j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} \\ &= \frac{e^+(w_j^{n+1}) - e^-(z_j^{n+1})}{\Delta t} - \frac{e^+(w_j^n) - e^-(z_j^n)}{\Delta t} + \frac{ae^+(w_j^n) + ae^-(z_{j+1}^n)}{\Delta x} \\ & \quad - \frac{ae^+(w_{j-1}^n) + ae^-(z_j^n)}{\Delta x} \\ &= \frac{e^+(w_j^{n+1}) - e^+(w_j^n)}{\Delta t} + a \frac{e^+(w_j^n) - e^+(w_{j-1}^n)}{\Delta x} - \frac{e^-(z_j^{n+1}) - e^-(z_j^n)}{\Delta t} \\ & \quad + a \frac{e^-(z_{j+1}^n) - e^-(z_j^n)}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Or, d'après (3.21) on a

$$w_j^{n+1} - \frac{\Delta t}{\varepsilon}(f(u_j^{n+1}) - v_j^{n+1}) = w_j^n \left(1 - a \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) + a \frac{\Delta t}{\Delta x} w_{j-1}^n,$$

et, comme $e^+(w)$ est une fonction strictement convexe de w , on a, d'une part,

$$\begin{aligned} e^+\left(w_j^{n+1} - \frac{\Delta t}{\varepsilon}(f(u_j^{n+1}) - v_j^{n+1})\right) &= e^+(w_j^{n+1}) - \frac{\Delta t}{\varepsilon}(f(u_j^{n+1}) - v_j^{n+1})(e^+)'(w_j^{n+1}) \\ & \quad + \frac{\Delta t^2}{\varepsilon^2}(f(u_j^{n+1}) - v_j^{n+1})^2(e^+)''(\xi) \\ & \geq e^+(w_j^{n+1}) - \frac{\Delta t}{\varepsilon}(f(u_j^{n+1}) - v_j^{n+1})(e^+)'(w_j^{n+1}), \end{aligned}$$

et, d'autre part,

$$e^+ \left(w_j^n \left(1 - a \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) + a \frac{\Delta t}{\Delta x} w_{j-1}^n \right) \leq e^+(w_j^n) \left(1 - a \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) + a \frac{\Delta t}{\Delta x} e^+(w_{j-1}^n).$$

On obtient ainsi que

$$e^+(w_j^{n+1}) - \frac{\Delta t}{\varepsilon} (f(u_j^{n+1}) - v_j^{n+1})(e^+)'(w_j^{n+1}) \leq e^+(w_j^n) \left(1 - a \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) + a \frac{\Delta t}{\Delta x} e^+(w_{j-1}^n),$$

autrement dit

$$\frac{e^+(w_j^{n+1}) - e^+(w_j^n)}{\Delta t} + a \frac{e^+(w_j^n) - e^+(w_{j-1}^n)}{\Delta x} \leq \frac{\Delta t}{\varepsilon} (f(u_j^{n+1}) - v_j^{n+1})(e^+)'(w_j^{n+1}).$$

De manière analogue, comme $e^-(z)$ est une fonction strictement concave de z , on obtient

$$-\frac{e^-(z_j^{n+1}) - e^-(z_j^n)}{\Delta t} + a \frac{e^-(z_{j+1}^n) - e^-(z_j^n)}{\Delta x} \leq -\frac{\Delta t}{\varepsilon} (f(u_j^{n+1}) - v_j^{n+1})(e^-)'(z_j^{n+1}).$$

On peut alors conclure que

$$\frac{E_j^{n+1} - E_j^n}{\Delta t} + \frac{Q_{j+\frac{1}{2}}^n - Q_{j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} \leq \frac{\Delta t}{\varepsilon} (f(u_j^{n+1}) - v_j^{n+1}) \left((e^+)'(w_j^{n+1}) - (e^-)'(z_j^{n+1}) \right). \quad (3.43)$$

On remarque maintenant que (on omet les indices pour alléger les notations)

$$\begin{aligned} (f(u) - v)(e^+)'(w) &= (f(u) - v)(e^+)'(f(u) + au + v - f(u)) \\ &= (f(u) - v)(e^+)'(f(u) + au) - (f(u) - v)^2(e^+)''(\xi) \\ &= (f(u) - v)(\eta)'(u) - (f(u) - v)^2(e^+)''(\xi) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (f(u) - v)(e^-)'(z) &= (f(u) - v)(e^-)'(f(u) - au + v - f(u)) \\ &= (f(u) - v)(e^-)'(f(u) - au) - (f(u) - v)^2(e^-)''(\tilde{\xi}) \\ &= (f(u) - v)(\eta)'(u) - (f(u) - v)^2(e^-)''(\tilde{\xi}) \end{aligned}$$

De (3.43) on peut alors conclure que

$$\frac{E_j^{n+1} - E_j^n}{\Delta t} + \frac{Q_{j+\frac{1}{2}}^n - Q_{j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} \leq \frac{\Delta t}{\varepsilon} (f(u_j^{n+1}) - v_j^{n+1})^2 ((e^-)''(\tilde{\xi}_j^{n+1}) - (e^+)''(\xi_j^{n+1})) \leq 0,$$

du à la convexité et à la concavité de $(e^+)''$ et de $(e^-)''$ respectivement. Nous considérons maintenant une fonction $\psi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R} \times]0, +\infty[)$ telle que $\psi \geq 0$, nous multiplions les membres de gauche et de droite de l'inégalité précédente par $\Delta t \Delta x \psi_j^n$ et faisons la somme pour $n \in \mathbb{N}$ et pour $j \in \mathbb{Z}$. Nous obtenons

$$\Delta t \Delta x \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} E_j^n \frac{\psi_j^{n-1} - \psi_j^n}{\Delta t} + \Delta t \Delta x \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{Z}} Q_{j+\frac{1}{2}}^n \frac{\psi_j^n - \psi_{j+1}^n}{\Delta x} \geq 0,$$

cette inégalité pouvant s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} & \int_{\Delta t}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} E(u_{\Delta}(x, t), v_{\Delta}(x, t)) \frac{\psi_{\Delta}(x, t - \Delta t) - \psi_{\Delta}(x, t)}{\Delta t} dx dt \\ & + \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} (ae^+(w_{\Delta}(x, t)) + ae^-(z_{\Delta}(x + \Delta x, t))) \frac{\psi_{\Delta}(x, t) - \psi_{\Delta}(x + \Delta x, t)}{\Delta x} \leq 0. \end{aligned}$$

Nous passons maintenant à la limite lorsque $\varepsilon, \Delta t, \Delta x \rightarrow 0$. Or on a, d'une part,

$$E(u_{\Delta}(x, t), v_{\Delta}(x, t)) \longrightarrow E(u, f(u))(x, t) = \eta(u(x, t))$$

et, d'autre part,

$$\begin{aligned} & ae^+(w_{\Delta}(x, t)) + ae^-(z_{\Delta}(x + \Delta x, t)) \\ & \longrightarrow ae^+(f(u(x, t)) + au(x, t)) + ae^-(f(u(x, t)) - au(x, t)) \\ & = F(u, f(u))(x, t) \\ & = q(u(x, t)), \end{aligned}$$

de sorte que l'on obtient

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \eta(u) \frac{\partial \psi}{\partial t} + q(u) \frac{\partial \psi}{\partial x} dx dt \geq 0.$$

Cette inégalité étant valable pour toute fonction teste ψ et pour tout couple entropie-flux d'entropie (η, q) , on conclut que u est la solution entropique du problème de Cauchy pour la loi de conservation scalaire (3.15), de donnée initiale u_0 , ce que finit la preuve du théorème. \square

Le cadre général du couplage

Dans ce chapitre, nous décrivons de façon générale le problème du couplage de systèmes hyperboliques de lois de conservation. Les notations et définitions que nous introduisons ici seront utilisées au chapitre prochain dans un cadre simple, celui du couplage entre le système de relaxation (3.1) et la loi de conservation scalaire (3.15), puis au chapitre 7 dans un cadre plus complexe, celui du couplage du système de la dynamique des gaz et d'un système de relaxation associé. Le présent chapitre introduit ainsi le cadre formel qui permettra de traiter les problèmes de couplage qui seront abordés dans la suite de ce mémoire.

Dans sa forme la plus générale, ce problème consiste en coupler les deux systèmes hyperboliques

$$\left. \begin{aligned} U_L \in \mathbb{R}^p \\ \frac{\partial U_L}{\partial t} + \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} F_{Li}(U_L) = S_L(U_L), \\ x \in \Omega_L, t > 0, \end{aligned} \right| \begin{aligned} U_R \in \mathbb{R}^q \\ \frac{\partial U_R}{\partial t} + \sum_{i=1}^d \frac{\partial}{\partial x_i} F_{Ri}(U_R) = S_R(U_R), \\ x \in \Omega_R, t > 0, \end{aligned}$$

à une interface fixe située en $\Omega \setminus (\Omega_L \cup \Omega_R)$, avec la condition initiale

$$\begin{aligned} U_L(x, 0) &= U_{L0}(x), & x \in \Omega_L, \\ U_R(x, 0) &= U_{R0}(x), & x \in \Omega_R, \end{aligned}$$

et des conditions de couplage à l'interface que nous allons préciser par la suite. On suppose que Ω_L , Ω_R et Ω sont des ouverts de \mathbb{R}^d tels que $\Omega = \Omega_L \cup \Omega_R \cup (\overline{\Omega_L} \cap \overline{\Omega_R})$ et que les ensembles Ω_L , Ω_R et $\overline{\Omega_L} \cap \overline{\Omega_R}$ sont disjoints entre eux. Uniquement le cas unidimensionnel ($d = 1$) sera traité ici, mais nous faisons toutefois référence, dans le contexte de la thermohydraulique, à des cas plus généraux de couplage de systèmes de différentes dimensions, comme ceux étudiés dans [HH04]. Nous allons alors fixer $\Omega_L = \{x : x < 0\}$ et $\Omega_R = \{x : x > 0\}$, l'interface de couplage se plaçant alors en $x = 0$.

Les notions que nous présentons par la suite ont été introduites, d'abord pour le cas d'une équation scalaire, par Godlewski et Raviart dans [GR04], puis, pour le cas

des systèmes, par Godlewski, LeThan et Raviart dans [GLR05]. Dans ces travaux on s'intéresse au cas où les systèmes couplés sont de même taille, c'est-à-dire avec $p = q$. Deux approches sont proposées pour traiter ce problème. La première est d'introduire un modèle global, au moyen d'un flux global, pour décrire les systèmes à coupler. Cette approche est nommée *couplage par flux*. Comme le système couplé est finalement un système conservatif, son implémentation numérique est classique, au sens où les méthodes de volumes finis traditionnelles peuvent être appliquées. La deuxième approche, qui sera celle que l'on adoptera (généralisée au cas de systèmes de tailles différentes, en suivant [ACC+05a], [ACC+05b]), est nommée *couplage par état*. Ce couplage consiste à résoudre dans chaque sous-domaine un problème aux limites relatif au modèle correspondant, pour lequel la condition au bord est transmise par le modèle du domaine complémentaire. Ces *conditions de couplage* imposent de façon faible la continuité des variables d'état au niveau de l'interface de couplage. Une autre approche, qui dérive de cette deuxième, peut être envisagée. Il s'agit du *couplage par état modifié*, où l'on transmet au niveau de l'interface de couplage d'autres variables que les variables conservatives, ce qui peut être plus intéressant du point de vue de la physique. Dans ce contexte, les méthodes de volumes finis existantes doivent être adaptées pour préciser l'information à transmettre à l'interface de couplage au niveau numérique. Dans les travaux précédemment cités, une méthode de double-flux, inspirée de celle de [AK01], est ainsi proposée.

Avant de continuer, nous précisons les notations utilisées dans la suite de ce chapitre. Les fonctions et les quantités des systèmes de gauche et de droite seront systématiquement notées par un indice L (*left*) et R (*right*). On utilisera les notations g (gauche) et d (droite), quand il s'agit de faire référence aux états initiaux de gauche et de droite pour un problème de Riemann pour un système donné.

4.1 Le cas des systèmes de même taille

Dans ce premier paragraphe, on suppose $p = q$ et on admet que les vecteurs U_L et U_R correspondent aux mêmes variables physiques. Il s'agit alors de coupler les systèmes

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F_L(U) = S_L(U), \\ U(x, 0) = U_{L0}(x), \\ x < 0, \quad t > 0, \end{array} \right. \quad \left| \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F_R(U) = S_R(U), \\ U(x, 0) = U_{R0}(x), \\ x > 0, \quad t > 0, \end{array} \right. \quad (4.1)$$

en $x = 0$. Les flux F_L et F_R et les termes sources S_L et S_R sont des fonctions données (on peut avoir S_L et S_R nuls) et on suppose que l'espace des états admissibles pour U est un ouvert Ω de \mathbb{R}^p .

4.1.1 Le couplage par flux

Le couplage par flux consiste en rassembler les deux sous-modèles de (4.1) par moyen de l'introduction d'une nouvelle variable. Le modèle couplé peut être, par exemple

(d'autres possibilités existent), le système augmenté

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F(U, Y) = S(U, Y), \\ \frac{\partial Y}{\partial t} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \end{cases} \quad (4.2)$$

où la nouvelle variable Y (une *variable de couleur*) prend ses valeurs dans l'intervalle $[0, 1]$ et a comme condition initiale

$$Y(x, 0) = Y_0(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Le flux F et le terme source S du système couplé sont maintenant définis par

$$F(U, Y) = (1 - Y)F_L(U) + YF_R(U)$$

et

$$S(U, Y) = (1 - Y)S_L(U) + YS_R(U).$$

Le système couplé est ainsi un système conservatif. Cependant, cette méthode peut introduire des phénomènes tels que la résonance, si la matrice jacobienne DF du flux F admet une valeur propre nulle. En ce cas la matrice jacobienne du système global possède une valeur propre double nulle et ses vecteurs propres peuvent ne pas générer une base de \mathbb{R}^{p+1} . C'est pourquoi parfois la deuxième équation de (4.2) est remplacée par une équation de relaxation qui envoie Y à la valeur d'équilibre Y_0 .

4.1.2 Le couplage par état

L'idée de la méthode du couplage par état est de regarder les systèmes à coupler comme deux problèmes de valeurs au bord et d'imposer, au niveau de l'interface de couplage $x = 0$, la condition aux limites

$$U(0^-, t) = U(0^+, t), \quad (4.3)$$

autrement dit, imposer que $U(0^+, t)$ soit une condition aux limites pour le système *de gauche* et que $U(0^-, t)$ soit une condition aux limites pour le système *de droite*. De façon concrète, la solution U du problème couplé doit être solution, dans l'ensemble $\{x < 0, t > 0\}$, du problème aux limites pour le système

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F_L(U) = S_L(U), \quad x < 0, \quad t > 0, \\ U(x, 0) = U_{0L}(x), \quad x < 0, \end{cases} \quad (4.4)$$

ayant comme condition au bord $U(0, t) = U(0^+, t)$, $t > 0$, et elle doit être solution, dans l'ensemble $\{x > 0, t > 0\}$, du problème aux limites pour le système

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F_R(U) = S_R(U), \quad x > 0, \quad t > 0, \\ U(x, 0) = U_{0R}(x), \quad x > 0, \end{cases} \quad (4.5)$$

ayant comme condition au bord $U(0, t) = U(0^-, t)$, $t > 0$.

Or, comme on l'a mentionné dans le chapitre 1 de la première partie, ces conditions aux limites ne peuvent avoir lieu que dans un sens faible. Dans [GR04] et [GLR05], les auteurs proposent d'interpréter la condition (4.3) comme une condition aux limites admissible au sens de Dubois et LeFloch (cf. [DL88]) : la solution U du problème couplé doit vérifier au niveau de l'interface de couplage les conditions

$$\begin{aligned} U(0^-, t) &\in \mathcal{O}_L(U(0^+, t)), \\ U(0^+, t) &\in \mathcal{O}_R(U(0^-, t)), \end{aligned} \tag{4.6}$$

pour tout $t > 0$, où, pour $a \in \Omega$,

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_L(a) &:= \{W_L(0^-; U, a) : U \in \Omega\}, \\ \mathcal{O}_R(a) &:= \{W_R(0^+; a, U) : U \in \Omega\}, \end{aligned}$$

$W_i(\frac{x}{t}, a, b)$ ($i = L, R$) désignant la solution du problème de Riemann

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F_i(U) = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ U(x, 0) = \begin{cases} a, & x < 0, \\ b, & x > 0. \end{cases} \end{cases}$$

La condition (4.6) exprime ainsi que pour $t > 0$, $U(0^-, t)$ doit être la trace en $\frac{x}{t} = 0^-$ d'une solution d'un problème de Riemann pour le système associé au flux F_L , dont la donnée initiale prend la valeur $U(0^+, t)$ pour $x > 0$, et une condition symétrique pour $U(0^+, t)$: celui-ci doit être la trace en $\frac{x}{t} = 0^+$ d'une solution d'un problème de Riemann pour le système associé au flux F_R , dont la donnée initiale prend la valeur $U(0^-, t)$ pour $x < 0$. Il est important de remarquer que, si la condition aux limites (4.3) a lieu au sens fort, clairement la condition faible (4.6) est aussi vérifiée.

Sans aucune condition supplémentaire, ce problème n'est pas toujours bien posé, même si chacun des modèles (4.4) et (4.5) est bien posé. En particulier, il peut ne pas y avoir unicité de la solution du problème couplé. Pour le voir, considérons par exemple le couplage entre deux équations scalaires

$$\begin{array}{l|l} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f_L(u) = 0, & \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f_R(u) = 0, \\ x < 0, \quad t > 0, & x > 0, \quad t > 0, \end{array}$$

où les flux f_L et f_R sont tels que $f'_L(u) < 0$ et $f'_R(u) > 0$, $\forall u$. On peut prendre le cas particulier où $f_L(u) = -u$ et $f_R(u) = u$. Dans ce cas, comme les ondes pour le système associé au flux f_L sont de vitesse négative et celles du système associé au flux f_R de vitesse positive, on a

$$\mathcal{O}_L(a) = \mathcal{O}_R(a) = \{a\}.$$

Ainsi la condition (4.6) entraîne

$$u(0^-, t) = u(0^+, t),$$

et le problème couplé peut prendre une valeur arbitraire $u(0, t) = \alpha(t)$ à la frontière $x = 0$.

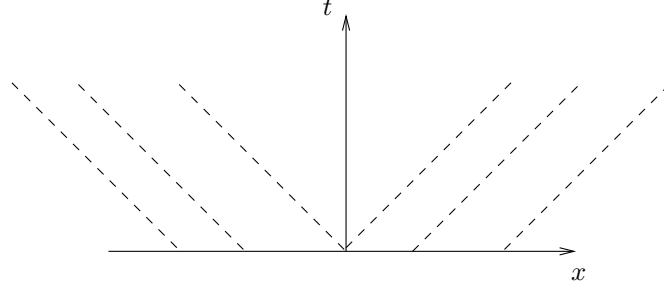


FIG. 4.1 – Caractéristiques pour le problème couplé lorsque $f'_L < 0$ et $f'_R > 0$: la solution est indéterminée en $x = 0$.

4.1.3 Le couplage par état modifié

On peut envisager de transmettre au niveau de l'interface de couplage, au lieu des variables d'état, d'autres variables physiques. Dans ce cas, la condition de couplage (4.6) est remplacée par une condition analogue dans les nouvelles variables. On parle désormais de *couplage par état modifié*. Le cadre général est le suivant. Supposons que

$$U \mapsto V_i = \varphi_i(U) \quad (i = L, R),$$

est un changement de variables qui soit un difféomorphisme entre Ω et un ouvert $\Omega_V \subseteq \mathbb{R}^n$. Au lieu d'imposer la condition (4.3), on impose une condition analogue dans les nouvelles variables :

$$\varphi_L(U(0^-, t)) = \varphi_R(U(0^+, t)). \quad (4.7)$$

Autrement dit, ce ne sont plus les variables U qui sont transmises à l'interface, mais les nouvelles variables V . C'est pourquoi on parle aussi de couplage par état dans les variables V , de façon à préciser à travers quelles variables le couplage s'effectue. Si l'on pose $V_L(0^-, t) = \varphi_L(U(0^-, t))$ et $V_R(0^+, t) = \varphi_R(U(0^+, t))$, la condition (4.7) signifie que, pour tout $t > 0$, les conditions

$$\begin{aligned} V_L(0^-, t) &\in \tilde{\mathcal{O}}_L(V_R(0^+, t)), \\ V_R(0^+, t) &\in \tilde{\mathcal{O}}_R(V_L(0^-, t)), \end{aligned} \quad (4.8)$$

doivent être vérifiées, où, pour $b \in \Omega_V$,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{O}}_L(b) &:= \{Z_L(0^-; V, b) : V \in \Omega_V\}, \\ \tilde{\mathcal{O}}_R(b) &:= \{Z_R(0^+; b, V) : V \in \Omega_V\}. \end{aligned}$$

Les fonctions $Z_L(\frac{x}{t}; V_g, V_d)$ et $Z_R(\frac{x}{t}; V_g, V_d)$ correspondent maintenant respectivement à la solution du problème de Riemann pour le système de gauche et de droite de (4.1), exprimée en variables V , c'est-à-dire

$$Z_L\left(\frac{x}{t}; V_g, V_d\right) = \varphi_L\left(W_L\left(\frac{x}{t}; \varphi_L^{-1}(V_g), \varphi_L^{-1}(V_d)\right)\right)$$

et

$$Z_R\left(\frac{x}{t}; V_g, V_d\right) = \varphi_R\left(W_R\left(\frac{x}{t}; \varphi_R^{-1}(V_g), \varphi_R^{-1}(V_d)\right)\right).$$

On remarque que si $\varphi_L = \varphi_R$ est la fonction identité de Ω , et donc $V = U$, on retrouve bien sûr les conditions de couplage du paragraphe précédent.

Pour comparer le couplage par état avec différents systèmes de variables, nous prenons un premier exemple, celui du couplage entre deux lois de conservation scalaires de flux f_L et f_R respectivement. Supposons que l'on choisit les fonctions $\varphi_L(u) = f_L(u)$ et $\varphi_R(u) = f_R(u)$. Alors, dans le cas où la condition aux limites (4.8) donne lieu à l'égalité (4.7), c'est-à-dire quand la solution du problème couplé modifié est continue à l'interface, on obtient

$$f_L(u(0^-, t)) = f_R(u(0^+, t))$$

et on peut alors avoir $u(0^-, t) \neq u(0^+, t)$.

Un deuxième exemple, dans un cadre plus complexe que nous aborderons au chapitre 7, est celui du couplage des équations d'Euler de la dynamique des gaz (voir à l'introduction générale le système (8)), avec des lois d'états différentes (ce problème a été traité dans [CRS]). Dans ce cas, on peut considérer au lieu des variables conservatives $(\rho, \rho u, \rho e)$, par exemple les variables primitives (ρ, u, p) . Les fonctions φ_L et φ_R sont alors définies par

$$\varphi_L(U) = \left(\rho, \frac{\rho u}{\rho}, p_L(\rho, \varepsilon)\right), \quad \varphi_R(U) = \left(\rho, \frac{\rho u}{\rho}, p_R(\rho, \varepsilon)\right),$$

pour tout $U \in \Omega = \{(\rho, \rho u, \rho e) \in \mathbb{R}^3 : \rho > 0, \varepsilon > 0\}$, où $\rho e = \rho \varepsilon + \rho \frac{u^2}{2}$ et donc $\varepsilon = \frac{1}{\rho} \left(\rho e - \frac{(\rho u)^2}{2\rho}\right)$. Si à nouveau la solution du problème couplé est continue à l'interface, on a alors, pour tout $t > 0$,

$$(\rho, u, p)(0^-, t) = (\rho, u, p)(0^+, t).$$

Si l'on regarde ce qui se passe en variables conservatives, on a bien $\rho(0^-, t) = \rho(0^+, t)$ et $(\rho u)(0^-, t) = (\rho u)(0^+, t)$. En revanche, comme les lois d'états sont différentes pour les systèmes de gauche et de droite, les fonctions qui définissent les énergies internes le sont aussi (si, par exemple, $p_L = (\gamma_L - 1)\rho\varepsilon$ et $p_R = (\gamma_R - 1)\rho\varepsilon$ sont deux lois d'états de gaz parfaits avec coefficients adiabatiques $\gamma_L > 1$ et $\gamma_R > 1$ différents, on a $\varepsilon_L = \varepsilon_L(\rho, p) = \frac{p}{(\gamma_L - 1)\rho} \neq \varepsilon_R = \varepsilon_R(\rho, p) = \frac{p}{(\gamma_R - 1)\rho}$). Ainsi on aura $\varepsilon(0^-, t) \neq \varepsilon(0^+, t)$ et par conséquent $(\rho e)(0^-, t) \neq (\rho e)(0^+, t)$. Cet exemple montre qu'il n'est pas possible de préserver la continuité de la vitesse et de la pression au niveau de l'interface en préservant celle de l'énergie totale et donc qu'il n'est pas équivalent de coupler en variables conservatives et en variables primitives.

Ces deux exemples mettent aussi en évidence le fait que l'on doit faire par avance le choix des variables à transmettre.

4.2 Extension au cas des systèmes de tailles différentes

Les notions introduites dans [GLR05] et [GR04] pour le couplage de systèmes de même taille, que nous avons présentées à la section précédente, ont été généralisées

au cas des systèmes de tailles différentes dans [ACC+05a], [ACC+05b] et [ACC+05d]. Nous présentons ce cas ici. Le but est de coupler les deux systèmes

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U_L}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F_L(U_L) = S_L(U_L), \\ U_L(x, 0) = U_{L0}(x), \\ x < 0, \quad t > 0, \end{array} \right. \quad \left| \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U_R}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F_R(U_R) = S_R(U_R), \\ U_R(x, 0) = U_{R0}(x), \\ x > 0, \quad t > 0, \end{array} \right. \quad (4.9)$$

où, maintenant, U_L prend ses valeurs dans un ouvert Ω_L de \mathbb{R}^p , U_R dans un ouvert Ω_R de \mathbb{R}^q et $p \neq q$. On considère qu'il existe deux opérateurs, un, de projection, de l'espace des états du modèle « plus grand » vers l'espace des états du modèle « plus petit », et un autre, de relèvement, dans le sens contraire, qui permettent de faire une correspondance entre les variables des deux systèmes. On suppose

$$\begin{array}{ccc} \Pi_R^L : \Omega_L \longrightarrow \Omega_R & \text{et} & \Pi_L^R : \Omega_R \longrightarrow \Omega_L \\ U_L \rightarrow \Pi_R^L(U_L) & & U_R \rightarrow \Pi_L^R(U_R) \end{array}$$

de tels opérateurs. Bien évidemment, il existe de nombreuses façons de définir ces fonctions. Néanmoins, on les choisit au cas par cas, selon les informations que l'on dispose de la physique.

Le couplage par état est maintenant défini de façon analogue au couplage entre systèmes de même taille : les conditions de transmission imposées à l'interface sont les conditions

$$\begin{aligned} U_L(0^-, t) &= \Pi_L^R(U_R(0^+, t)), \\ \Pi_R^L(U_L(0^-, t)) &= U_R(0^+, t), \end{aligned}$$

à nouveau dans le sens où l'on impose

$$\begin{aligned} U_L(0^-, t) &\in \mathcal{O}_L\left(\Pi_L^R(U_R(0^+, t))\right), \\ U_R(0^+, t) &\in \mathcal{O}_R\left(\Pi_R^L(U_L(0^-, t))\right), \end{aligned} \quad (4.10)$$

pour tout $t > 0$. Les ensembles \mathcal{O}_L et \mathcal{O}_R sont, pour $a \in \Omega_L$ et pour $b \in \Omega_R$, définis par

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_L(a) &:= \{W_L(0^-; U_L, a) : U_L \in \Omega_L\}, \\ \mathcal{O}_R(b) &:= \{W_R(0^+; b, U_R) : U_R \in \Omega_R\}. \end{aligned}$$

Comme précédemment, $W_i(\frac{x}{t}; U_{ig}, U_{id})$ ($i = L, R$) désigne la solution du problème de Riemann

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F_i(U_i) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ U_i(x, 0) = \begin{cases} U_{ig}, & x < 0, \\ U_{id}, & x > 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

On peut aussi envisager à nouveau le couplage à travers d'autres systèmes de variables. Soient alors $\varphi_L : \Omega_L \longrightarrow \Omega_{V,L}$ et $\varphi_R : \Omega_R \longrightarrow \Omega_{V,R}$ des changements de

variables comme au paragraphe précédent, avec $V_L = \varphi_L(U_L)$ et $V_R = \varphi_R(U_R)$. On suppose également qu'il existe des opérateurs

$$\Theta_R^L : \Omega_{V,L} \longrightarrow \Omega_{V,R} \quad \text{et} \quad \Theta_L^R : \Omega_{V,R} \longrightarrow \Omega_{V,L}$$

$$V_L \rightarrow \Theta_R^L(V_L) \qquad \qquad V_R \rightarrow \Theta_L^R(V_R)$$

qui jouent le même rôle que Π_R^L et Π_L^R , en faisant correspondre les nouvelles variables V_L et V_R entre elles. La condition de couplage que l'on souhaite imposer s'écrit cette fois

$$V_L(0^-, t) = \Theta_L^R(V_R(0^+, t)),$$

$$\Theta_R^L(V_L(0^-, t)) = V_R(0^+, t),$$

soit, sous sa forme faible,

$$V_L(0^-, t) \in \tilde{\mathcal{O}}_L\left(\Theta_L^R(V_R(0^+, t))\right),$$

$$V_R(0^+, t) \in \tilde{\mathcal{O}}_R\left(\Theta_R^L(V_L(0^-, t))\right),$$
(4.11)

pour tout $t > 0$. Comme pour les systèmes de même taille, les ensembles $\tilde{\mathcal{O}}_L$ et $\tilde{\mathcal{O}}_R$ sont des ensembles de traces de solutions du problème de Riemann qui sont désormais exprimées dans les variables V_L et V_R : si $b_L \in \Omega_{V,L}$ et $b_R \in \Omega_{V,R}$,

$$\tilde{\mathcal{O}}_L(b_L) := \{Z_L(0^-; V, b_L) : V \in \Omega_{V,L}\},$$

$$\tilde{\mathcal{O}}_R(b_R) := \{Z_R(0^+; b_R, V) : V \in \Omega_{V,R}\},$$

où $Z_L(\frac{x}{t}; V_{Lg}, V_{Ld})$ (respectivement $Z_R(\frac{x}{t}; V_{Rg}, V_{Rd})$) correspond maintenant à la solution du problème de Riemann pour le système de gauche (respectivement de droite) de (4.9), exprimée en variables V , c'est-à-dire

$$Z_L\left(\frac{x}{t}; V_{Lg}, V_{Ld}\right) = \varphi_L\left(W_L\left(\frac{x}{t}; \varphi_L^{-1}(V_{Lg}), \varphi_L^{-1}(V_{Ld})\right)\right)$$

et

$$Z_R\left(\frac{x}{t}; V_{Rg}, V_{Rd}\right) = \varphi_R\left(W_R\left(\frac{x}{t}; \varphi_R^{-1}(V_{Rg}), \varphi_R^{-1}(V_{Rd})\right)\right).$$

Remarque 4.1.

On a présenté le couplage par état modifié dans sa forme la plus générale. Si l'on suppose que les opérateurs Π_R^L et Π_L^R ne dépendent pas du changement de variables φ_L et φ_R , on peut prendre $\Theta_R^L = \Pi_R^L$ et $\Theta_L^R = \Pi_L^R$. Mais on ne peut pas considérer, comme il pourrait paraître naturel, $\Theta_R^L = \varphi_R \circ \Pi_R^L \circ \varphi_L^{-1}$ et $\Theta_L^R = \varphi_L \circ \Pi_L^R \circ \varphi_R^{-1}$.

Couplage d'une loi de conservation scalaire et du système de relaxation associé

On s'intéresse dans ce chapitre à un premier problème de couplage du type « modèle à l'équilibre - modèle hors équilibre ». On étudie ici dans un cadre simple le problème du couplage entre la loi de conservation scalaire (3.15) et le système de relaxation (3.1).

5.1 Le problème couplé

Nous étudions ici le problème du couplage, à une interface fixe placée en $x = 0$, entre le système de relaxation (3.1) et la loi de conservation scalaire (3.15). Le problème couplé est défini par

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0, \quad x < 0, \quad t > 0, \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial t} + a^2 \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x} = \frac{1}{\varepsilon} (f(u_\varepsilon) - v_\varepsilon), \end{array} \right. \quad x > 0, \quad t > 0. \end{array} \right. \quad (5.1)$$

Nous considérerons dans toute cette section $\varepsilon > 0$ fixé. Pour alléger les notations, on omettra alors, ainsi que nous avons fait au chapitre 3, l'indice ε des variables u et v du système de relaxation.

Nous nous intéressons dans la suite au problème de Cauchy pour le système (5.1), de donnée initiale

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R} \\ v(x, 0) = v_0(x), \quad x > 0. \end{array} \right. \quad (5.2)$$

Dans le contexte du chapitre précédent, le système L correspond ici à la loi de conservation scalaire (3.15) et le système R au système de relaxation (3.1). Nous adaptons le concept du couplage par état, introduit dans ce chapitre, pour définir une solution du

problème couplé (5.1)-(5.2). Pour cela on fait correspondre entre soi les variables d'état de gauche et de droite intervenant dans le problème couplé de la façon suivante : d'une part, à chaque état $u \in \mathbb{R}$ pour l'équation (3.15), nous faisons correspondre un état $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ pour le système de relaxation défini par $(u, v) = (u, f(u))$. D'autre part, pour $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, on l'associe naturellement l'état u pour l'équation scalaire. Ainsi, selon les notations du chapitre précédent, on a

$$\Pi_R^L(u) = (u, f(u)), \quad \Pi_L^R(u, v) = u.$$

Selon la définition du couplage par état, la solution (u, v) du problème couplé doit être telle que u est solution de l'équation (3.15) dans l'ensemble des $x < 0$, le couple (u, v) est solution du système (3.1) dans l'ensemble des $x > 0$ et, de plus, une condition de couplage entre $u(0^-, t)$ et $(u, v)(0^+, t)$ doit se vérifier, à savoir :

$$u(0^-, t) \in \mathcal{O}_L(u(0^+, t)), \quad \forall t > 0, \quad (5.3)$$

$$(u, v)(0^+, t) \in \mathcal{O}_R\left((u, f(u))(0^-, t)\right), \quad \forall t > 0. \quad (5.4)$$

Ci-dessus, pour $a \in \mathbb{R}$, $\mathcal{O}_L(a)$ est l'ensemble des traces en $x = 0^-$ des solutions de tous les problèmes de Riemann pour l'équation scalaire (3.15), dont la donnée initiale est égale à a , pour $x > 0$:

$$\mathcal{O}_L(a) = \{w(0^-; u, a) : u \in \mathbb{R}\},$$

où $w(\frac{x}{t}; u_g, u_d)$ est la solution du problème de Riemann

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = \begin{cases} u_g, & x < 0, \\ u_d, & x > 0. \end{cases} \end{cases}$$

Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\mathcal{O}_R((a, b))$ est, de manière analogue, l'ensemble

$$\mathcal{O}_R((a, b)) = \{W(0^+; (a, b), (u, v)) : (u, v) \in \mathbb{R}^2\},$$

où $W(\frac{x}{t}; (u_g, v_g), (u_d, v_d))$ est ici la solution du problème de Riemann pour le système

$$\begin{cases} \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + a^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \end{cases} & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ (u, v)(x, 0) = \begin{cases} (u_g, v_g), & x < 0, \\ (u_d, v_d), & x > 0. \end{cases} \end{cases}$$

Analysons les conditions (5.3) et (5.4). D'une part, selon [DL88], imposer la condition (5.3) est équivalent à imposer que u soit solution du problème aux limites pour la loi de conservation scalaire (3.15), au sens de Bardos, Le Roux et Nédélec, dans l'ensemble $\mathbb{R}^- \times [0, +\infty[$, de donnée au bord $u(0^+, t)$, pour tout $t > 0$. D'autre part, comme le système homogène associé au système (3.1), c'est-à-dire le système

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + a^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \end{cases}$$

est un système linéaire diagonalisable, imposer la condition (5.4) est ici aussi équivalent à imposer que (u, v) soit solution du problème aux limites pour le système (3.1), dans l'ensemble $\mathbb{R}^+ \times [0, +\infty[$, de condition aux limites $(u, f(u))(0^-, t)$, au sens classique des équations hyperboliques linéaires.

On définit alors une solution du problème (5.1) de la manière suivante :

Définition 5.1.

Soit $(u_0, v_0) \in L^\infty(\mathbb{R}) \times L^\infty(\mathbb{R}^+)$. Un couple

$$(u, v) \in L^\infty(\mathbb{R} \times [0, +\infty[) \times L^\infty(\mathbb{R}^+ \times [0, +\infty[)$$

est une solution du problème couplé (5.1)-(5.2) si u est solution, dans le domaine $\mathbb{R}^- \times [0, +\infty[$, du problème aux limites

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0, & x < 0, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x < 0, \\ u(0, t) = u(0^+, t), & t > 0, \end{cases} \quad (5.5)$$

et si (u, v) est solution, dans le domaine $\mathbb{R}^+ \times [0, +\infty[$, du problème aux limites

$$\begin{cases} \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + a^2 \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\varepsilon} (f(u) - v), \end{cases} & x > 0, t > 0, \\ (u, v)(x, 0) = (u_0, v_0)(x), & x > 0, \\ (u, v)(0, t) = (u, f(u))(0^-, t), & t > 0. \end{cases} \quad (5.6)$$

Remarquons à nouveau que le problème (5.6) est équivalent au problème suivant, dans les variables $(w, z) = (v + au, v - au)$:

$$\begin{cases} \begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} + a \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{\varepsilon} (f(u) - v), \\ \frac{\partial z}{\partial t} - a \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\varepsilon} (f(u) - v), \end{cases} & x > 0, t > 0, \\ (w, z)(x, 0) = (v_0 + au_0, v_0 - au_0)(x), & x > 0, \\ (w, z)(0, t) = (f(u) + au, f(u) - au)(0^-, t), & t > 0. \end{cases} \quad (5.7)$$

5.1.1 Le problème aux limites pour le système de relaxation

Nous nous intéressons désormais au problème aux limites pour le système de relaxation. Soient $(u_0, v_0) \in L^\infty(\mathbb{R}^+)^2$ et $(\bar{u}, \bar{v}) \in L^\infty(\mathbb{R}^+)^2$ et considérons le problème aux limites pour le système (3.1) dans le quart de plan $\mathbb{R} \times [0, +\infty[$, de condition aux

limites (\bar{u}, \bar{v}) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + a^2 \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\varepsilon}(f(u) - v), \end{array} \right. \quad x > 0, \quad t > 0, \\ (u, v)(x, 0) = (u_0, v_0)(x), \quad x > 0, \\ (u, v)(0, t) = (\bar{u}, \bar{v})(t), \quad t > 0. \end{array} \right. \quad (5.8)$$

Le problème précédent est équivalent au problème suivant, dans les variables (w, z) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w}{\partial t} + a \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{\varepsilon}(f(u) - v), \\ \frac{\partial z}{\partial t} - a \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\varepsilon}(f(u) - v), \end{array} \right. \quad x > 0, \quad t > 0, \\ (w, z)(x, 0) = (w_0, z_0)(x), \quad x > 0, \\ (w, z)(0, t) = (\bar{w}, \bar{z})(t), \quad t > 0, \end{array} \right. \quad (5.9)$$

où $(\bar{w}, \bar{z}) = (\bar{v} + a\bar{u}, \bar{v} - a\bar{u})$. On peut montrer, comme on a fait pour le système de relaxation au chapitre 3, que $(w, z) \in C([0, T]; L_{loc}^1(\mathbb{R}^+))^2$ est solution du problème (5.9) si et seulement si, pour tout $t > 0$ on a

$$\begin{aligned} w(x, t) &= \begin{cases} w_0(x - at) + \int_0^t \frac{1}{\varepsilon}(f(u) - v)(x - a(t - \tau), \tau) d\tau, & \text{si } x - at > 0, \\ \bar{w}\left(t - \frac{x}{a}\right) + \int_{t - \frac{x}{a}}^t \frac{1}{\varepsilon}(f(u) - v)(x - a(t - \tau), \tau) d\tau, & \text{si } x - at < 0, \end{cases} \\ z(x, t) &= z_0(x + at) + \int_0^t \frac{1}{\varepsilon}(f(u) - v)(x + a(t - \tau), \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Nous allons montrer, comme au chapitre 3, que les équations (5.10) admettent une solution. Afin de montrer que la solution (w, z) admet une trace en $x = 0^+$, nous prouvons l'existence de solution de (5.10) dans l'espace

$$C([0, T]; L_{loc}^1(\mathbb{R}^+))^2 \cap C([0, +\infty[; L_{loc}^1([0, T]))^2,$$

pour tout $T > 0$.

Théorème 5.1.

Soit $(w_0, z_0) \in L^\infty(\mathbb{R})^2$. Alors, le problème de Cauchy (5.9) admet une unique solution (w, z) telle que $(w, z) \in C([0, T]; L_{loc}^1(\mathbb{R}^+))^2 \cap C([0, +\infty[; L_{loc}^1([0, T]))^2$, pour tout $T > 0$.

Démonstration.

La preuve est analogue à celle du Théorème 3.1 du chapitre 3. On reprend ici les notations y utilisées. Nous prouvons d'abord un résultat d'existence locale. Pour ce faire, on pose M une constante positive telle que $M > \|(w_0, z_0)\|_\infty$, $M > \|\bar{w}\|_\infty$ et K_M la constante de Lipschitz de F associée à la valeur M . On considère $T_M > 0$ tel que

$$T_M < \min \left\{ 1, \frac{M - \|(w_0, z_0)\|_\infty}{|F(0, 0)| + MK_M}, \frac{M - \|\bar{w}\|_\infty}{|F(0, 0)| + MK_M}, \frac{1}{((2 + a)K_M + 2aK_M)} \right\}$$

et $\Omega = [0, \alpha]$ un intervalle borné de \mathbb{R}^+ tel que $[0, 2aT_M] \subseteq \Omega$.

Nous allons montrer que l'équation (3.6) admet une solution (w, z) appartenant à l'espace $C([0, T_M]; L^1(\Omega))^2 \cap L^\infty([0, T_M]; L^\infty(\mathbb{R}))^2 \cap C(\Omega; L^1_{loc}([0, T_M]))^2$. Pour ce faire, on prouve que l'application définie par

$$(\bar{w}, \bar{z}) \longmapsto \mathcal{T}(\bar{w}, \bar{z}) = (w, z),$$

où

$$w(x, t) = \begin{cases} w_0(x - at) + \int_0^t F(\bar{w}, \bar{z})(x - a(t - \tau), \tau) d\tau, & \text{si } x - at > 0, \\ \bar{w}\left(t - \frac{x}{a}\right) + \int_{t - \frac{x}{a}}^t F(\bar{w}, \bar{z})(x - a(t - \tau), \tau) d\tau, & \text{si } x - at < 0, \end{cases}$$

$$z(x, t) = z_0(x + at) + \int_0^t F(\bar{w}, \bar{z})(x + a(t - \tau), \tau) d\tau,$$

admet un unique point fixe dans l'espace fonctionnel

$$\mathcal{C} = \left\{ (w, z) \in C([0, T_M]; L^1(\Omega))^2 \cap L^\infty([0, T_M]; L^\infty(\mathbb{R}))^2 \cap C(\Omega; L^1_{loc}([0, T_M]))^2 : \|(w, z)\|_\infty \leq M \right\}.$$

On a que \mathcal{C} est un espace de Banach pour la norme

$$\|(w, z)\|_{\mathcal{C}} = \sup_{[0, T_M]} \|(w, z)(\cdot, t)\|_{L^1(\Omega)^2} + \text{esssup}_{[0, T_M]} \|(w, z)(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})^2} + \sup_{[0, \alpha]} \|(w, z)(x, \cdot)\|_{L^1([0, T_M])^2}.$$

La propriété de stabilité en norme L^∞ se prouve de la même manière que dans le théorème 3.1 et on va donc omettre ici sa preuve.

Prouvons alors que l'application \mathcal{T} est une contraction dans \mathcal{C} . Soient (\bar{w}, \bar{z}) et $(\tilde{w}, \tilde{z}) \in \mathcal{C}$. Comme au troisième chapitre, nous noterons

$$(\mathcal{T}_{\bar{w}}, \mathcal{T}_{\bar{z}}) = \mathcal{T}(\bar{w}, \bar{z}), \quad (\mathcal{T}_{\tilde{w}}, \mathcal{T}_{\tilde{z}}) = \mathcal{T}(\tilde{w}, \tilde{z}).$$

On prouve de la même manière que l'on y a fait que

$$\|(\mathcal{T}_{\bar{w}}, \mathcal{T}_{\bar{z}}) - (\mathcal{T}_{\tilde{w}}, \mathcal{T}_{\tilde{z}})\|_{L^\infty([0, T_M]; L^\infty(\mathbb{R}))^2} \leq K_M T_M \|(\bar{w}, \bar{z}) - (\tilde{w}, \tilde{z})\|_{L^\infty([0, T_M]; L^\infty(\mathbb{R}))^2}. \quad (5.11)$$

D'autre part, pour chaque $0 \leq t \leq T_M$, on a que

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{T}_{\bar{w}} - \mathcal{T}_{\tilde{w}})(x, t)\|_{L^1(\Omega)} &\leq \int_\Omega \left| \int_0^t (F(\bar{w}, \bar{z}) - F(\tilde{w}, \tilde{z}))(x - a(t - \tau), \tau) d\tau \right| dx \\ &= \int_0^{at} \left| \int_{t - \frac{x}{a}}^t (F(\bar{w}, \bar{z}) - F(\tilde{w}, \tilde{z}))(x - a(t - \tau), \tau) d\tau \right| dx \\ &\quad + \int_{at}^\alpha \left| \int_0^t (F(\bar{w}, \bar{z}) - F(\tilde{w}, \tilde{z}))(x - a(t - \tau), \tau) d\tau \right| dx \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \int_0^t \int_{a(t-\tau)}^{at} |(F(\bar{w}, \bar{z}) - F(\tilde{w}, \tilde{z}))(x - a(t - \tau), \tau)| \, dx d\tau \\ &= \int_0^t \int_0^{a\tau} |(F(\bar{w}, \bar{z}) - F(\tilde{w}, \tilde{z}))(x, \tau)| \, dx d\tau, \end{aligned}$$

par application du théorème de Fubini et du changement de variables $x - a(t - \tau) = y$. On obtient alors

$$I_1 \leq T_M K_M \|(\bar{w}, \bar{z}) - (\tilde{w}, \tilde{z})\|_{C([0, T_M]; L^1(\Omega))}^2 \quad (5.12)$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \int_0^t \int_{at}^\alpha |(F(\bar{w}, \bar{z}) - F(\tilde{w}, \tilde{z}))(x - a(t - \tau), \tau)| \, dx d\tau \\ &= \int_0^t \int_{a\tau}^{\alpha - a(t-\tau)} |(F(\bar{w}, \bar{z}) - F(\tilde{w}, \tilde{z}))(x, \tau)| \, dx d\tau, \end{aligned}$$

et on obtient à nouveau

$$I_2 \leq T_M K_M \|(\bar{w}, \bar{z}) - (\tilde{w}, \tilde{z})\|_{C([0, T_M]; L^1(\Omega))}^2. \quad (5.13)$$

On analyse maintenant $\|(\mathcal{T}_{\bar{z}} - \mathcal{T}_{\tilde{z}})(x, t)\|_{L^1(\Omega)}$. On a

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{T}_{\bar{z}} - \mathcal{T}_{\tilde{z}})(x, t)\|_{L^1(\Omega)} &\leq \int_0^\alpha \int_0^t |(F(\bar{w}, \bar{z}) - F(\tilde{w}, \tilde{z}))(x + a(t - \tau), \tau)| \, d\tau dx \\ &= \int_0^t \int_0^\alpha |(F(\bar{w}, \bar{z}) - F(\tilde{w}, \tilde{z}))(x + a(t - \tau), \tau)| \, dx d\tau \\ &= \int_0^t \int_{a(t-\tau)}^{\alpha + a(t-\tau)} |(F(\bar{w}, \bar{z}) - F(\tilde{w}, \tilde{z}))(x, \tau)| \, dx d\tau \\ &= \int_0^t \int_{a(t-\tau)}^\alpha |(F(\bar{w}, \bar{z}) - F(\tilde{w}, \tilde{z}))(x, \tau)| \, dx d\tau \\ &\quad + \int_0^t \int_\alpha^{\alpha + a(t-\tau)} |(F(\bar{w}, \bar{z}) - F(\tilde{w}, \tilde{z}))(x, \tau)| \, dx d\tau. \end{aligned}$$

Or, d'un côté on a que

$$\int_0^t \int_{a(t-\tau)}^\alpha |(F(\bar{w}, \bar{z}) - F(\tilde{w}, \tilde{z}))(x, \tau)| \, dx d\tau \leq T_M K_M \|(\bar{w}, \bar{z}) - (\tilde{w}, \tilde{z})\|_{C([0, T_M]; L^1(\Omega))}^2.$$

D'un autre côté,

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_\alpha^{\alpha + a(t-\tau)} |(F(\bar{w}, \bar{z}) - F(\tilde{w}, \tilde{z}))(x, \tau)| \, dx d\tau \\ \leq a T_M^2 K_M \|(\bar{w}, \bar{z}) - (\tilde{w}, \tilde{z})\|_{L^\infty([0, T_M]; L^\infty(\mathbb{R}))}^2. \end{aligned}$$

On en déduit, d'après ces deux dernières inégalités et de (5.12) et (5.13), que

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{T}(\bar{w}, \bar{z}) - \mathcal{T}(\tilde{w}, \tilde{z})\|_{L^\infty([0, T_M]; L^\infty(\mathbb{R}))} + \|\mathcal{T}(\bar{w}, \bar{z}) - \mathcal{T}(\tilde{w}, \tilde{z})\|_{C([0, T_M]; L^1(\Omega))} \\ & \leq (2T_M K_M + aT_M^2 K_M) \|(\bar{w}, \bar{z}) - (\tilde{w}, \tilde{z})\|_C. \end{aligned}$$

On s'attache maintenant à prouver une estimation de $\|\mathcal{T}(\bar{w}, \bar{z}) - \mathcal{T}(\tilde{w}, \tilde{z})\|_{C([0, \alpha]; L^1([0, T_M]))^2}$. On a

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}_{\bar{w}} - \mathcal{T}_{\tilde{w}}\|_{C([0, \alpha]; L^1([0, T_M]))} &= \sup_{x \in [0, \alpha]} \|(\mathcal{T}_{\bar{w}} - \mathcal{T}_{\tilde{w}})(x, t)\|_{L^1([0, T_M])} \\ &= \sup_{x \in [0, \alpha]} \int_0^{T_M} |(\mathcal{T}_{\bar{w}} - \mathcal{T}_{\tilde{w}})(x, t)| dt. \end{aligned}$$

On suppose que $x < aT_M$. On a

$$\begin{aligned} \int_0^{T_M} |(\mathcal{T}_{\bar{w}} - \mathcal{T}_{\tilde{w}})(x, t)| dt &\leq \int_0^{\frac{x}{a}} \int_0^t |(F(\bar{w}, \bar{z}) - F(\tilde{w}, \tilde{z}))(x - a(t - \tau), \tau)| d\tau dt \\ &\quad + \int_{\frac{x}{a}}^{T_M} \int_{t - \frac{x}{a}}^t |(F(\bar{w}, \bar{z}) - F(\tilde{w}, \tilde{z}))(x - a(t - \tau), \tau)| d\tau dt \\ &= \tilde{I}_1 + \tilde{I}_2. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \tilde{I}_1 &= \int_0^{\frac{x}{a}} \int_\tau^{\frac{x}{a}} |(F(\bar{w}, \bar{z}) - F(\tilde{w}, \tilde{z}))(x - a(t - \tau), \tau)| dt d\tau \\ &= a \int_0^{\frac{x}{a}} \int_{a\tau}^x |(F(\bar{w}, \bar{z}) - F(\tilde{w}, \tilde{z}))(s, \tau)| ds d\tau \\ &= \int_0^{\frac{x}{a}} \int_\tau^{\frac{x}{a}} |(F(\bar{w}, \bar{z}) - F(\tilde{w}, \tilde{z}))(as, \tau)| ds d\tau \\ &\leq T_M K_M \sup_{[0, \alpha]} \|(\bar{w}, \bar{z}) - (\tilde{w}, \tilde{z})(x, t)\|_{L^1([0, T_M])} \\ &\quad + aT_M^2 K_M \|(\bar{w}, \bar{z}) - (\tilde{w}, \tilde{z})\|_{L^\infty([0, T_M]; \mathbf{L}^\infty(\Omega))}. \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \tilde{I}_2 &= \int_0^{T_M} \int_\tau^{\tau + \frac{x}{a}} |(F(\bar{w}, \bar{z}) - F(\tilde{w}, \tilde{z}))(x - a(t - \tau), \tau)| dt d\tau \\ &= a \int_0^{T_M} \int_0^x |(F(\bar{w}, \bar{z}) - F(\tilde{w}, \tilde{z}))(s, \tau)| ds d\tau \\ &\leq aT_M K_M \sup_{[0, \alpha]} \|(\bar{w}, \bar{z}) - (\tilde{w}, \tilde{z})(x, t)\|_{L^1([0, T_M])}. \end{aligned}$$

On prouve des estimations analogues si $x \geq aT_M$ et pour $\|\mathcal{T}_{\bar{z}} - \mathcal{T}_{\tilde{z}}\|_{C([0, \alpha]; L^1([0, T_M]))}$, de sorte que l'on obtient

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}(\bar{w}, \bar{z}) - \mathcal{T}(\tilde{w}, \tilde{z})\|_{C([0, \alpha]; L^1([0, T_M]))^2} &\leq aT_M K_M \sup_{[0, \alpha]} \|(\bar{w}, \bar{z}) - (\tilde{w}, \tilde{z})(x, t)\|_{L^1([0, T_M])} \\ &\quad + aT_M^2 K_M \|(\bar{w}, \bar{z}) - (\tilde{w}, \tilde{z})\|_{L^\infty([0, T_M]; \mathbf{L}^\infty(\Omega))}. \end{aligned}$$

On conclut alors que l'on a

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}(\bar{w}, \bar{z}) - \mathcal{T}(\tilde{w}, \tilde{z})\|_{\mathcal{C}} &\leq ((2+a)T_M K_M + 2aT_M^2 K_M) \|(\bar{w}, \bar{z}) - (\tilde{w}, \tilde{z})\|_{\mathcal{C}} \\ &\leq T_M ((2+a)K_M + 2aK_M) \|(\bar{w}, \bar{z}) - (\tilde{w}, \tilde{z})\|_{\mathcal{C}}, \end{aligned}$$

puisque $T_M < 1$. Comme on a

$$T_M < \frac{1}{((2+a)K_M + 2aK_M)},$$

on conclut que l'application \mathcal{T} est une contraction stricte de \mathcal{C} dans lui-même. Elle admet donc un unique point fixe (w, z) , d'après le théorème de Banach, qui est solution de problème de Cauchy (5.9) dans $C([0, T_M]; L^1(\Omega))^2 \cap L^\infty([0, T_M]; L^\infty(\mathbb{R}))^2 \cap C([0, \alpha]; L^1([0, T_M]))^2$. Si l'on admet l'existence d'une région invariante pour le système de relaxation (voir théorème 3.2), on conclut comme dans la preuve du théorème 3.1 que l'on peut considérer T_M ne dépendant pas de la donnée initiale, ce qui permet d'obtenir le résultat d'existence globale. \square

D'après (5.10), on déduit que, si (w, z) est la solution de (5.9) donnée par le théorème précédent, alors

$$w(0, t) = \bar{w}(t)$$

et

$$z(0, t) = z_0(at) + \int_0^t \frac{1}{\varepsilon} (f(u) - v)(a(t - \tau), \tau) d\tau.$$

On a ainsi que w vérifie la condition aux limites $w(0, t) = \bar{w}(t)$ au sens fort, tandis que pour z la condition aux limites n'est pas prise en compte. Ceci est cohérent avec le fait que pour l'invariant de Riemann z les caractéristiques sont sortantes du domaine $\mathbb{R}^+ \times [0, +\infty[$ et que pour w celles-ci sont rentrantes.

Dans les variables (u, v) , la solution du problème aux limites de donnée initiale (u_0, v_0) et de condition aux limites (\bar{u}, \bar{v}) est alors donnée par

$$(u, v)(x, t) = \left(\frac{w - z}{2a}, \frac{w + z}{2} \right) (x, t),$$

où w et z vérifient (5.10), et on a en particulier

$$\begin{aligned} u(0, t) &= \frac{\bar{v}(t) + a\bar{u}(t) - v_0(at) + au_0(at) - \int_0^t \frac{1}{\varepsilon} (f(u) - v)(a(t - \tau), \tau) d\tau}{2a}, \\ v(0, t) &= \frac{\bar{v}(t) + a\bar{u}(t) + v_0(at) - au_0(at) + \int_0^t \frac{1}{\varepsilon} (f(u) - v)(a(t - \tau), \tau) d\tau}{2}. \end{aligned}$$

5.1.2 Solution du problème couplé dans les cas $f' > 0$ et $f' < 0$

Considérons K un intervalle de \mathbb{R} où les solutions de l'équation scalaire (3.1) prennent leurs valeurs. Nous considérons ici un cas simple et nous nous proposons d'étudier le problème couplé lorsque le flux f vérifie $f'(u) > 0$, $\forall u \in K$, ou $f'(u) < 0$.

0, $\forall u \in K$. On se pose dans le même cadre qu'au chapitre 3, notamment nous admettons que la condition sous-caractéristique (3.11) a lieu sur K .

Rappelons d'abord quelques résultats concernant le problème aux limites pour les lois de conservation scalaires. Pour plus de détails sur ce sujet, nous invitons le lecteur à lire la section qui lui est consacrée à la première partie de ce mémoire. Considérons $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^-) \cap BV(\mathbb{R}^-)$ et $a \in L^\infty([0, +\infty[) \cap BV([0, +\infty[)$. Selon Bardos, Le Roux et Nédélec (cf. [BLN79]), le problème aux limites

$$\begin{cases} u_t + (f(u))_x = 0, & x < 0, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x < 0, \end{cases} \quad (5.14)$$

$$u(0, t) = a(t), \quad (5.15)$$

admet une solution unique $u \in L^\infty(\mathbb{R}^- \times [0, +\infty[) \cap BV(\mathbb{R}^- \times [0, +\infty[)$ telle que u vérifie au sens faible l'équation (5.14) dans $\mathbb{R}^- \times [0, +\infty[$ et la condition aux limites (5.15) au sens suivant :

$$\frac{f(u(0, t)) - f(k)}{k - u(0, t)} \leq 0, \quad \forall k \in I(u(0, t), a(t)), \quad \forall t > 0, \quad (5.16)$$

où $I(u(0, t), a(t))$ dénote l'intervalle

$$I(u(0, t), a(t)) = [\min \{u(0, t), a(t)\}, \max \{u(0, t), a(t)\}].$$

Cette condition est équivalente à la condition de Dubois et LeFloch ([DL88])

$$u(0^-, t) \in \mathcal{O}(a(t)), \quad \forall t > 0.$$

Analysons la condition (5.16) dans les cas où f' est strictement positive et où f' est strictement négative sur K . Soit $t > 0$. On vérifie que, si $k \in I(u(0, t), a(t))$, alors

$$\frac{f(u(0, t)) - f(k)}{k - u(0, t)} = -\frac{f(u(0, t)) - f(k)}{u(0, t) - k} = -f'(\xi),$$

avec ξ entre $u(0, t)$ et $a(t)$. On voit alors bien que, si $f' > 0$, la condition (5.16) est vérifiée pour tout k , indépendamment de la valeur de $a(t)$. On conclut que dans ce cas la condition aux limites n'impose aucune restriction sur u . En revanche, si $f' < 0$, la condition (5.16) n'est jamais vérifiée si $u(0, t) \neq a(t)$ et on conclut ainsi dans ce cas que la solution du problème aux limites (5.14)-(5.16) vérifie la condition aux limites (5.15) au sens fort, c'est-à-dire on a $u(0, t) = a(t)$, $\forall t > 0$.

D'après cette analyse, nous pouvons conclure que, d'une part, si f' est une fonction strictement positive sur K , alors la condition de couplage n'impose aucune restriction sur la valeur de la trace $u(0^-, t)$, d'autre part, si f' est strictement négative sur K , la condition de couplage impose

$$u(0^-, t) = u(0^+, t).$$

Dans les deux cas, pour que (u, v) soit solution du problème couplé, on doit avoir que le couple (w, z) vérifie les équations (5.10), avec $\bar{w}(t) = f(u(0^-, t)) + au(0^-, t)$.

Solution du problème couplé dans le cas $f' > 0$

Nous supposons $f'(u) > 0, \forall u \in K$. Dans ce cas, puisque le problème (5.5) ne dépend pas de la donnée au bord, on conclut qu'il existe une unique solution u de ce problème, telle que $u(0^-, t)$ est bien définie et dépend uniquement des valeurs de la donnée initiale u_0 . Ainsi, le problème (5.7) admet une unique solution (w, z) , donnée par (5.10), avec $\bar{w}(t) = f(u(0^-, t)) + au(0^-, t)$.

Proposition 5.1.

Soit $(u_0, v_0) \in L^\infty(\mathbb{R}) \times L^\infty(\mathbb{R}^+) \cap BV(\mathbb{R}) \times BV(\mathbb{R}^+)$. Alors le problème couplé (5.1) admet une unique solution (u, v) telle que

$$\begin{aligned} u &\in L^\infty(\mathbb{R} \times [0, +\infty[) \cap BV(\mathbb{R} \times [0, T]) \cap L^1_{loc}(\mathbb{R} \times [0, +\infty[), \\ v &\in L^\infty(\mathbb{R}^+ \times [0, +\infty[) \cap BV(\mathbb{R}^+ \times [0, T]) \cap C^0([0, T]; L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)), \end{aligned}$$

pour tout $T > 0$.

Solution du problème couplé dans le cas $f' < 0$

Si $f'(u) < 0, \forall u \in K$, alors on a constaté que, d'une part, on doit avoir au niveau de l'interface de couplage

$$u(0^-, t) = u(0^+, t),$$

puisque u doit être solution du problème aux limites (5.5)

D'autre part, si l'on se donne une donnée au bord $\bar{w}(t)$, le problème aux limites (5.9) admet une solution unique (w, z) telle que $z(x, t)$ ne dépend pas de \bar{w} , et telle que $w(0^+, t) = \bar{w}(t)$. On a que

$$u(0^+, t) = \frac{w(0^+, t) - z(0^+, t)}{2a}.$$

On se donne ainsi $\bar{u}(t) \in BV([0, +\infty[)$. On considère, d'une part, la solution u du problème aux limites pour l'équation (5.14), de donnée au bord $\bar{u}(t)$. On a $u(0^-, t) = \bar{u}(t)$. On considère d'autre part la solution (w, z) de (5.10), avec $\bar{w}(t) = f(\bar{u}(t)) + a\bar{u}(t)$. On a que, si (u, v) est la solution de (5.8) associée à (w, z) , alors

$$u(0^+, t) = \frac{f(\bar{u}(t)) + a\bar{u}(t) - z(0^+, t)}{2a}.$$

Le problème couplé (5.1) admet alors une solution unique s'il existe \bar{u} unique tel que l'on ait

$$u(0^-, t) = u(0^+, t),$$

soit

$$\bar{u}(t) = \frac{f(\bar{u}(t)) + a\bar{u}(t) - z(0^+, t)}{2a}.$$

Or cette équation est équivalente à

$$f(\bar{u}(t)) - a\bar{u}(t) = z(0^+, t)$$

et donc, puisque l'application $u \longrightarrow h^-(u) = f(u) - au$ est injective sur K , l'équation précédente admet une unique solution donnée par

$$\bar{u}(t) = (h^-)^{-1}(z(0^+, t)).$$

Nous obtenons donc un résultat analogue à celui de la Proposition 5.1 :

Proposition 5.2.

Soit $(u_0, v_0) \in L^\infty(\mathbb{R}) \times L^\infty(\mathbb{R}^+) \cap BV(\mathbb{R}) \times BV(\mathbb{R}^+)$. Alors le problème couplé (5.1) admet une unique solution (u, v) telle que

$$\begin{aligned} u &\in L^\infty(\mathbb{R} \times [0, +\infty[) \cap BV(\mathbb{R} \times [0, T]) \cap L^1_{loc}(\mathbb{R} \times [0, +\infty[), \\ v &\in L^\infty(\mathbb{R}^+ \times [0, +\infty[) \cap BV(\mathbb{R}^+ \times [0, T]) \cap C^0([0, T]; L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)), \end{aligned}$$

pour tout $T > 0$. On a de plus

$$u(0^-, t) = u(0^+, t), \quad \forall t > 0.$$

5.2 Un schéma numérique pour le problème couplé

Nous proposons ici un schéma numérique pour approcher les solutions du problème couplé (5.1), basé dans la méthode de double-flux proposée par Abgrall et Karni dans [AK01].

On se donne un pas de temps Δt et un pas d'espace Δx . Dû à la géométrie du problème, nous nous proposons maintenant de discrétiser les équations (5.1) dans un maillage dont les cellules sont les intervalles $[x_j, x_{j+1}[\times [t^n, t^{n+1}[$, avec $x_j = j\Delta x$ et $t^n = n\Delta t$, de sorte que l'on propose une solution approchée de la forme (u_Δ, v_Δ) , avec

$$\begin{cases} u_\Delta = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{n \geq 0} u_{j+\frac{1}{2}}^n \chi_{[x_j, x_{j+1}[\times [t^n, t^{n+1}[}(x, t), \\ v_\Delta = \sum_{j \geq 0} \sum_{n \geq 0} v_{j+\frac{1}{2}}^n \chi_{[x_j, x_{j+1}[\times [t^n, t^{n+1}[}(x, t), \end{cases} \quad (5.17)$$

où l'on cherche à que $u_{j+\frac{1}{2}}^n$ et $v_{j+\frac{1}{2}}^n$ soient respectivement des approximations des moyennes

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{x_j}^{x_{j+1}} u(x, t^n) dx$$

et

$$\frac{1}{\Delta x} \int_{x_j}^{x_{j+1}} v(x, t^n) dx.$$

Nous remarquons que par rapport au chapitre 3, nous utilisons des notations différentes : les points $x_{j+\frac{1}{2}} = \left(j + \frac{1}{2}\right)\Delta x$ sont désormais les noeuds du maillage et les points x_j les bords des cellules du maillage. De cette façon, l'interface de couplage sépare les cellules $[x_{-1}, x_0[$ et $[x_0, x_1[$.

Discrétisation des données initiales.

Elle est faite comme au chapitre 3 : On considère $u_{j+\frac{1}{2}}^0$ une moyenne de u_0 sur l'intervalle $[x_j, x_{j+1}[$,

$$u_{j+\frac{1}{2}}^0 = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_j}^{x_{j+1}} u_0(x) dx, \quad j \in \mathbb{Z},$$

et on prend la condition initiale discrète pour v à l'équilibre :

$$v_{j+\frac{1}{2}}^0 = f(u_{j+\frac{1}{2}}^0), \quad j \geq 0.$$

Évolution en temps.

La discrétisation que nous considérons pour le système de relaxation est celle introduite au chapitre 3, c'est-à-dire le schéma numérique défini par (3.22) ou, de manière équivalente, par (3.21). Pour l'équation scalaire, nous considérerons un schéma monotone du premier ordre.

Ainsi, si l'on suppose connue la solution approchée $(u_{j+\frac{1}{2}}^n, v_{j+\frac{1}{2}}^n)$, $j \in \mathbb{Z}$, à l'instant t^n , on propose de la définir à l'instant t^{n+1} , pour $j \geq 0$, par

$$\begin{cases} \frac{u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - u_{j+\frac{1}{2}}^n}{\Delta t} + \frac{v_{j+\frac{3}{2}}^n - v_{j-\frac{1}{2}}^n}{2\Delta x} - a \frac{u_{j+\frac{3}{2}}^n - 2u_{j+\frac{1}{2}}^n + u_{j-\frac{1}{2}}^n}{2\Delta x} = 0, \\ \frac{v_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - v_{j+\frac{1}{2}}^n}{\Delta t} + a^2 \frac{u_{j+\frac{3}{2}}^n - u_{j-\frac{1}{2}}^n}{2\Delta x} - a \frac{v_{j+\frac{3}{2}}^n - 2v_{j+\frac{1}{2}}^n + v_{j-\frac{1}{2}}^n}{2\Delta x} = \frac{1}{\varepsilon} \left[f(u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}) - v_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} \right]. \end{cases} \quad (5.18)$$

Pour que le schéma précédent soit bien défini, il faut donner une valeur à $v_{-\frac{1}{2}}^{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ceci est fait en imposant la condition de couplage numérique suivante :

$$v_{-\frac{1}{2}}^{n+1} = f(u_{-\frac{1}{2}}^{n+1}), \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (5.19)$$

On montre ainsi comme au chapitre 3 que les équations (5.18) admettent une solution et que le schéma est donc bien défini.

Pour $j \leq -1$, nous proposons un schéma du premier ordre

$$\frac{u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - u_{j+\frac{1}{2}}^n}{\Delta t} + \frac{g_{j+1}^n - g_j^n}{\Delta x} = 0, \quad (5.20)$$

où $g_j^n = g(u_{j-\frac{1}{2}}^n, u_{j+\frac{1}{2}}^n)$ est le flux numérique, que nous supposons consistant avec la loi de conservation scalaire (3.1), c'est-à-dire

$$g(u, u) = f(u), \quad \forall u,$$

et monotone : on suppose que g est une fonction croissante par rapport à la première variable et décroissante par rapport à la deuxième.

Le schéma couplé est alors défini par (5.20), pour $j < 0$, et par (5.18), pour $j \geq 0$. Ainsi que nous l'avons fait au chapitre 3, on considère aussi, pour tout $j \geq 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$w_{j+\frac{1}{2}}^n = v_{j+\frac{1}{2}}^n + a u_{j+\frac{1}{2}}^n,$$

et

$$z_{j+\frac{1}{2}}^n = v_{j+\frac{1}{2}}^n - au_{j+\frac{1}{2}}^n,$$

de sorte que $w_{j+\frac{1}{2}}^n$ et $z_{j+\frac{1}{2}}^n$ vérifient

$$\begin{cases} \frac{w_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - w_{j+\frac{1}{2}}^n}{\Delta t} + a \frac{w_{j+\frac{1}{2}}^n - w_{j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} = \frac{1}{\varepsilon} \left[f(u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}) - v_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} \right], \\ \frac{z_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - z_{j+\frac{1}{2}}^n}{\Delta t} - a \frac{z_{j+\frac{3}{2}}^n - z_{j+\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} = \frac{1}{\varepsilon} \left[f(u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}) - v_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} \right], \end{cases} \quad (5.21)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $j \geq 0$.

Nous allons montrer la convergence du schéma numérique ainsi défini vers une solution de problème couplé (5.1), à $\varepsilon > 0$ fixé et lorsque $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$ dans un cas simple, où l'on impose que f' soit une fonction strictement positive sur un intervalle caractéristique K .

5.3 Convergence du schéma numérique dans le cas $f' > 0$

Nous nous restreindrons ici au cas où f' est strictement positive sur un intervalle caractéristique et nous nous proposons de montrer la convergence du schéma défini à la section précédente dans ce cas. Pour ce faire, nous allons utiliser essentiellement les mêmes techniques qu'au chapitre 3.

Nous supposons désormais K un intervalle borné de \mathbb{R} tel que $u_0(x) \in K, \forall x \in \mathbb{R}$, et tel que $f'(u) > 0, \forall u \in K$.

5.3.1 Estimations de la norme L^∞ et de la Variation Totale

Puisque nous considérons f' positive, nous pouvons supposer que le schéma (5.20) est un schéma décentré, autrement dit, le flux numérique g vérifie $g_j^n = f(u_{j-\frac{1}{2}}^n), \forall j \leq 0$. Le schéma (5.20) s'écrit alors sous la forme

$$\frac{u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - u_{j+\frac{1}{2}}^n}{\Delta t} + \frac{f_{j+\frac{1}{2}}^n - f_{j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} = 0, \quad (5.22)$$

où l'on a posé $f_{j+\frac{1}{2}}^n := f(u_{j+\frac{1}{2}}^n)$.

Nous utiliserons ici des notations analogues à celles utilisées au chapitre (3) : étant donnée une suite discrète $r_{j+\frac{1}{2}}^n$, où $n \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{Z}$ ou $j \geq 0$, on pose, pour tout j et pour tout n ,

$$\Delta r_j^n = r_{j+\frac{1}{2}}^n - r_{j-\frac{1}{2}}^n, \quad \Delta r_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = r_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - r_{j+\frac{1}{2}}^n.$$

Nous allons supposer aussi que la condition sous-caractéristique, qui s'écrit ici

$$0 < f'(u) < a, \quad \forall u \in K, \quad (5.23)$$

et que la condition de CFL

$$a \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1, \quad (5.24)$$

se vérifient.

Nous établissons dans le lemme suivant une estimation de la norme L^∞ et une propriété de décroissance de la variation totale pour les solutions discrètes.

Lemme 5.1.

Soit K un intervalle borné de \mathbb{R} tel que $u_0(x) \in K$, $\forall x$. On suppose de plus que les conditions sous-caractéristique (5.23) et CFL (5.24) sont vérifiées. Alors on a

$$|u_{j+\frac{1}{2}}^n| \leq C, \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |v_{j+\frac{1}{2}}^n| \leq C, \quad \forall j \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (5.25)$$

$$\sum_{j<0} |\Delta u_j^{n+1}| + \sum_{j \geq 0} \frac{|\Delta w_j^{n+1}| + |\Delta z_j^{n+1}|}{2a} \leq \sum_{j<0} |\Delta u_j^n| + \sum_{j \geq 0} \frac{|\Delta w_j^n| + |\Delta z_j^n|}{2a}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (5.26)$$

et

$$\sum_{j<0} |\Delta u_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}| + \sum_{j \geq 0} \frac{|\Delta w_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}| + |\Delta z_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}|}{2a} \leq C \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(VT(u_0) + \sum_{p=1}^n \left| \Delta w_{-\frac{1}{2}}^{p-\frac{1}{2}} \right| \right), \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (5.27)$$

où la constante C ne dépend que de $\|u_0\|_{L^\infty}$ et de $VT(u_0)$ (en particulier, C ne dépend pas de ε).

Démonstration.

1. *Preuve de (5.25).*

Comme le schéma (5.22) est monotone, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $j \leq -1$,

$$\min \left\{ u_{j-\frac{1}{2}}^n, u_{j+\frac{1}{2}}^n \right\} \leq u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} \leq \max \left\{ u_{j-\frac{1}{2}}^n, u_{j+\frac{1}{2}}^n \right\}.$$

On peut alors conclure que, si on a, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{j+\frac{1}{2}}^n \in K, \quad \forall j \leq -1,$$

alors

$$u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} \in K, \quad \forall j \leq -1.$$

On déduit que, si $u_0(x) \in K$, $\forall x \in \mathbb{R}$, alors $u_{j+\frac{1}{2}}^n \in K$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall j \leq -1$, la suite $(u_{j+\frac{1}{2}}^n)_{j \leq -1, n \in \mathbb{N}}$ étant par conséquent bornée en norme l^∞ .

Pour les valeurs de $j \geq 0$, puisque l'on a supposé la condition de couplage (5.19), on peut suivre les pas de la preuve du théorème 3.4 du chapitre 3 pour montrer que

$$u_{j+\frac{1}{2}}^n \in K$$

et

$$(w_{j+\frac{1}{2}}^n, z_{j+\frac{1}{2}}^n) \in h^+(K) \times h^-(K),$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $j \in \mathbb{Z}$, $j \geq 0$, pourvu que $u_0 \in K$ et $(w_0, z_0) \in h^+(K) \times h^-(K)$, ce qui a lieu vu que l'on a supposé la condition initiale discrète à

l'équilibre. On peut donc établir (5.25).

3. *Preuve de (5.26).*

On commence par établir une estimation de $\sum_{j<0} |\Delta u_j^{n+1}|$. On a

$$\begin{aligned} \Delta u_j^{n+1} &= u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - u_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} \\ &= u_{j+\frac{1}{2}}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{\Delta f_j^n}{\Delta u_j^n} \Delta u_j^n - u_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{\Delta f_{j-1}^n}{\Delta u_{j-1}^n} \Delta u_{j-1}^n \\ &= \Delta u_j^n \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{\Delta f_j^n}{\Delta u_j^n} \right) + \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{\Delta f_{j-1}^n}{\Delta u_{j-1}^n} \Delta u_{j-1}^n. \end{aligned}$$

Comme d'après les conditions CFL (5.24) et sous-caractéristique (5.23) on a

$$1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{\Delta f_j^n}{\Delta u_j^n} \geq 0, \quad \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{\Delta f_{j-1}^n}{\Delta u_{j-1}^n} \geq 0,$$

on obtient

$$|\Delta u_j^{n+1}| \leq |\Delta u_j^n| + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \frac{\Delta f_{j-1}^n}{\Delta u_{j-1}^n} |\Delta u_{j-1}^n| - \frac{\Delta f_j^n}{\Delta u_j^n} |\Delta u_j^n| \right\}.$$

On effectue la somme des deux membres de l'inégalité précédente pour $j < 0$. On obtient

$$\sum_{j<0} |\Delta u_j^{n+1}| \leq \sum_{j<0} |\Delta u_j^n| - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{\Delta f_{-1}^n}{\Delta u_{-1}^n} |\Delta u_{-1}^n|. \quad (5.28)$$

D'autre part, en suivant la stratégie utilisée pour démontrer l'estimation (3.27) du Théorème 3.5 du chapitre 3, nous obtenons l'inégalité suivante :

$$\sum_{j \geq 1} \frac{|\Delta w_j^{n+1}| + |\Delta z_j^{n+1}|}{2a} \leq \sum_{j \geq 1} \frac{|\Delta w_j^n| + |\Delta z_j^n|}{2a} + \frac{\Delta t}{2\Delta x} (|\Delta w_0^n| - |\Delta z_1^n|). \quad (5.29)$$

Pour conclure que (5.26) est valable, il suffit alors d'estimer

$$\frac{|\Delta w_0^{n+1}| + |\Delta z_0^{n+1}|}{2a}.$$

Or on a, d'une part,

$$w_{\frac{1}{2}}^{n+1} = w_{\frac{1}{2}}^n - a \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta w_0^n + \frac{\Delta t}{\varepsilon} \left[f(u_{\frac{1}{2}}^{n+1}) - v_{\frac{1}{2}}^{n+1} \right],$$

et, d'autre part,

$$\begin{aligned} w_{-\frac{1}{2}}^{n+1} &= f(u_{-\frac{1}{2}}^{n+1}) + a u_{-\frac{1}{2}}^{n+1} \\ &= f\left(u_{-\frac{1}{2}}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{\Delta f_{-1}^n}{\Delta u_{-1}^n} \Delta u_{-1}^n\right) + a\left(u_{-\frac{1}{2}}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{\Delta f_{-1}^n}{\Delta u_{-1}^n} \Delta u_{-1}^n\right) \\ &= f(u_{-\frac{1}{2}}^n) + a u_{-\frac{1}{2}}^n + (f'(\xi^n) + a) \left(-\frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{\Delta f_{-1}^n}{\Delta u_{-1}^n} \Delta u_{-1}^n\right) \\ &= w_{-\frac{1}{2}}^n + (f'(\xi^n) + a) \left(-\frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{\Delta f_{-1}^n}{\Delta u_{-1}^n} \Delta u_{-1}^n\right), \end{aligned}$$

avec ξ^n entre $u_{-\frac{1}{2}}^n$ et $u_{-\frac{1}{2}}^{n+1}$. De la même manière, on montre que

$$z_{\frac{1}{2}}^{n+1} = z_{\frac{1}{2}}^n + a \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta z_1^n + \frac{\Delta t}{\varepsilon} \left(f(u_{\frac{1}{2}}^{n+1}) - v_{\frac{1}{2}}^{n+1} \right)$$

et

$$z_{-\frac{1}{2}}^{n+1} = z_{-\frac{1}{2}}^n + (f'(\xi^n) - a) \left(-\frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{\Delta f_{-1}^n}{\Delta u_{-1}^n} \Delta u_{-1}^n \right).$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} \Delta w_0^{n+1} = & \\ & \left(1 - a \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) \Delta w_0^n + \frac{\Delta t}{\varepsilon} \left(f(u_{\frac{1}{2}}^{n+1}) - v_{\frac{1}{2}}^{n+1} \right) - (f'(\xi^n) + a) \left(-\frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{\Delta f_{-1}^n}{\Delta u_{-1}^n} \Delta u_{-1}^n \right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \Delta z_0^{n+1} = & \\ & \Delta z_0^n + a \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta z_1^n + \frac{\Delta t}{\varepsilon} \left(f(u_{\frac{1}{2}}^{n+1}) - v_{\frac{1}{2}}^{n+1} \right) - (f'(\xi^n) - a) \left(-\frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{\Delta f_{-1}^n}{\Delta u_{-1}^n} \Delta u_{-1}^n \right). \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \left| \Delta w_0^{n+1} - \frac{\Delta t}{\varepsilon} \left(f(u_{\frac{1}{2}}^{n+1}) - v_{\frac{1}{2}}^{n+1} \right) \right| & \\ \leq \left(1 - a \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) |\Delta w_0^n| + (f'(\xi^n) + a) \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{\Delta f_{-1}^n}{\Delta u_{-1}^n} |\Delta u_{-1}^n| & \end{aligned}$$

et un résultat analogue pour z :

$$\begin{aligned} \left| \Delta z_0^{n+1} - \frac{\Delta t}{\varepsilon} \left(f(u_{\frac{1}{2}}^{n+1}) - v_{\frac{1}{2}}^{n+1} \right) \right| & \\ \leq |\Delta z_0^n| + a \frac{\Delta t}{\Delta x} |\Delta z_1^n| + (a - f'(\xi^n)) \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{\Delta f_{-1}^n}{\Delta u_{-1}^n} |\Delta u_{-1}^n|. & \end{aligned}$$

Maintenant, si l'on raisonne comme dans la preuve du théorème 3.5 du chapitre 3, on obtient

$$\begin{aligned} \left| \Delta w - \frac{\Delta t}{\varepsilon} (f - v) \right| + \left| \Delta z - \frac{\Delta t}{\varepsilon} (f - v) \right| & \geq \\ |\Delta w| + |\Delta z| - \frac{\Delta t}{\varepsilon} (f - v) \{ \text{sgn}(\Delta w) + \text{sgn}(\Delta z) \} = |\Delta w| + |\Delta z|, & \end{aligned}$$

où l'on a supprimé les indices pour alléger les notations. On déduit donc que

$$|\Delta w_0^{n+1}| + |\Delta z_0^{n+1}| \leq |\Delta w_0^n| + |\Delta z_0^n| + \frac{a\Delta t}{\Delta x} (|\Delta z_1^n| - |\Delta w_0^n|) + 2a \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{\Delta f_{-1}^n}{\Delta u_{-1}^n} |\Delta u_{-1}^n|,$$

ce qui permet d'obtenir

$$\frac{|\Delta w_0^{n+1}| + |\Delta z_0^{n+1}|}{2a} \leq \frac{|\Delta w_0^n| + |\Delta z_0^n|}{2a} + \frac{\Delta t}{2\Delta x} (|\Delta z_1^n| - |\Delta w_0^n|) + \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{\Delta f_{-1}^n}{\Delta u_{-1}^n} |\Delta u_{-1}^n|. \quad (5.30)$$

En combinant (5.28), (5.29) et (5.30), on obtient la propriété de décroissance de la variation totale (5.26).

3. *Preuve de (5.27).*

On a d'abord que, pour $j \leq -1$,

$$u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - u_{j+\frac{1}{2}}^n = -\frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{j+\frac{1}{2}}^n - f_{j-\frac{1}{2}}^n) = -\frac{\Delta t}{\Delta x} f'(\xi_j^n) (u_{j+\frac{1}{2}}^n - u_{j-\frac{1}{2}}^n),$$

avec ξ_j^n est entre $u_{j-\frac{1}{2}}^n$ et $u_{j+\frac{1}{2}}^n$. Comme la suite $(u_{j+\frac{1}{2}}^n)_{n \geq 0, j \leq -1}$ est bornée, on obtient

$$|u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - u_{j+\frac{1}{2}}^n| \leq C \frac{\Delta t}{\Delta x} |u_{j+\frac{1}{2}}^n - u_{j-\frac{1}{2}}^n|,$$

où la constante C ne dépend que de la norme L^∞ de u_0 , et donc

$$\sum_{j < 0} |u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - u_{j+\frac{1}{2}}^n| \leq C \frac{\Delta t}{\Delta x} \sum_{j < 0} |u_{j+\frac{1}{2}}^n - u_{j-\frac{1}{2}}^n| \leq C \frac{\Delta t}{\Delta x} VT(u_0),$$

d'après (5.26).

On a, d'autre part, d'après les équations (5.21),

$$\begin{aligned} \Delta w_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} &= \Delta w_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \left(1 - a \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) + a \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta w_{j-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{\varepsilon} \left(\Delta f_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \Delta v_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\right), \\ \Delta z_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} &= \Delta z_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \left(1 - a \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) + a \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta z_{j+\frac{3}{2}}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{\varepsilon} \left(\Delta f_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \Delta v_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\right). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \left| \Delta w_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{\varepsilon} \left(\Delta f_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \Delta v_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\right) \right| &\leq \left| \Delta w_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \right| \left(1 - a \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) + a \frac{\Delta t}{\Delta x} \left| \Delta w_{j-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \right|, \\ \left| \Delta z_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{\varepsilon} \left(\Delta f_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \Delta v_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\right) \right| &\leq \left| \Delta z_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \right| \left(1 - a \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) + a \frac{\Delta t}{\Delta x} \left| \Delta z_{j+\frac{3}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \right|, \end{aligned} \quad (5.31)$$

et, en raisonnant à nouveau comme dans la preuve du théorème 3.5 du chapitre 3, que

$$\begin{aligned} \left| \Delta w_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right| + \left| \Delta z_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right| &\leq \\ &\left| \Delta w_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{\varepsilon} \left(\Delta f_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \Delta v_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\right) \right| + \left| \Delta z_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{\varepsilon} \left(\Delta f_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \Delta v_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\right) \right|. \end{aligned}$$

En insérant ceci dans (5.31), on conclut donc

$$\begin{aligned} \left| \Delta w_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right| + \left| \Delta z_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right| &\leq \left| \Delta w_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \right| + \left| \Delta z_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \right| \\ &+ a \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \left| \Delta w_{j-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \right| - \left| \Delta w_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \right| \right\} + a \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \left| \Delta z_{j+\frac{3}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \right| - \left| \Delta z_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \right| \right\}. \end{aligned}$$

On effectue maintenant la somme pour $j \geq 0$ des membres de gauche et de droite de l'inégalité précédente. On obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{j \geq 0} \left| \Delta w_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right| + \left| \Delta z_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right| &\leq \sum_{j \geq 0} \left| \Delta w_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \right| + \left| \Delta z_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \right| + a \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \left| \Delta w_{-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \right| - \left| \Delta z_{\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \right| \right\} \\
&\leq \sum_{j \geq 0} \left| \Delta w_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \right| + \left| \Delta z_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \right| + a \frac{\Delta t}{\Delta x} \left| \Delta w_{-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \right| \\
&\leq \dots \leq \\
&\leq \sum_{j \geq 0} \left| \Delta w_{j+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \right| + \left| \Delta z_{j+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \right| + a \frac{\Delta t}{\Delta x} \sum_{p=1}^n \left| \Delta w_{-\frac{1}{2}}^{p-\frac{1}{2}} \right|. \tag{5.32}
\end{aligned}$$

Or on a

$$\begin{aligned}
\Delta w_{j+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} &= w_{j+\frac{1}{2}}^1 - w_{j+\frac{1}{2}}^0 = -a \frac{\Delta t}{\Delta x} (w_{j+\frac{1}{2}}^0 - w_{j-\frac{1}{2}}^0) + \frac{\Delta t}{\varepsilon} (f_{j+\frac{1}{2}}^1 - v_{j+\frac{1}{2}}^1) \\
&= -a \frac{\Delta t}{\Delta x} (w_{j+\frac{1}{2}}^0 - w_{j-\frac{1}{2}}^0) + \frac{\Delta t}{\varepsilon} (\Delta f_{j+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} - \Delta v_{j+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}),
\end{aligned}$$

et, de manière analogue,

$$\Delta z_{j+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = z_{j+\frac{1}{2}}^1 - z_{j+\frac{1}{2}}^0 = a \frac{\Delta t}{\Delta x} (z_{j+\frac{3}{2}}^0 - z_{j+\frac{1}{2}}^0) + \frac{\Delta t}{\varepsilon} (\Delta f_{j+\frac{1}{2}}^1 - \Delta v_{j+\frac{1}{2}}^1),$$

vu que $f_{j+\frac{1}{2}}^0 - v_{j+\frac{1}{2}}^0 = 0$, et on montre encore une fois que

$$\begin{aligned}
&\left| \Delta w_{j+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \right| + \left| \Delta z_{j+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \right| \\
&\leq \left| \Delta w_{j+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{\varepsilon} (\Delta f_{j+\frac{1}{2}}^1 - \Delta v_{j+\frac{1}{2}}^1) \right| + \left| \Delta z_{j+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{\varepsilon} (\Delta f_{j+\frac{1}{2}}^1 - \Delta v_{j+\frac{1}{2}}^1) \right| \\
&\leq a \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \left| z_{j+\frac{3}{2}}^0 - z_{j+\frac{1}{2}}^0 \right| + \left| w_{j+\frac{1}{2}}^0 - w_{j-\frac{1}{2}}^0 \right| \right\}.
\end{aligned}$$

On somme alors pour $j \geq 0$ les membres de gauche et de droite de l'inégalité ci-dessus et on insère le résultat dans l'inégalité (5.32). On obtient alors

$$\sum_{j \geq 0} \left| \Delta w_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right| + \left| \Delta z_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right| \leq a \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(VT(w_0) + VT(z_0) + \sum_{p=1}^n \left| \Delta w_{-\frac{1}{2}}^{p-\frac{1}{2}} \right| \right),$$

ce qui prouve (5.27). \square

Le lemme que l'on vient de prouver établit ainsi une estimation de la variation totale en temps et en espace pour les suites $(u_{j+\frac{1}{2}}^n)_{n \geq 0, j < 0}$, $(w_{j+\frac{1}{2}}^n)_{n \geq 0, j \geq 0}$ et $(z_{j+\frac{1}{2}}^n)_{n \geq 0, j \geq 0}$, pourvu que la quantité

$$\sum_{p=1}^n \left| \Delta w_{-\frac{1}{2}}^{p-\frac{1}{2}} \right| \tag{5.33}$$

soit bornée. Or, vu que

$$\begin{aligned} \left| \Delta w_{-\frac{1}{2}}^{p-\frac{1}{2}} \right| &= \left| w_{-\frac{1}{2}}^p - w_{-\frac{1}{2}}^{p-1} \right| = \left| (f(w_{-\frac{1}{2}}^p) + aw_{-\frac{1}{2}}^p) - (f(w_{-\frac{1}{2}}^{p-1}) + aw_{-\frac{1}{2}}^{p-1}) \right| \\ &= \left(f'(\xi_{-\frac{1}{2}}^{p-\frac{1}{2}}) + a \right) \left| w_{-\frac{1}{2}}^p - w_{-\frac{1}{2}}^{p-1} \right| \\ &\leq 2a \left| w_{-\frac{1}{2}}^p - w_{-\frac{1}{2}}^{p-1} \right| = 2a \left| \Delta u_{-\frac{1}{2}}^{p-\frac{1}{2}} \right|, \end{aligned}$$

la quantité (5.33) est bornée si

$$\sum_{p=1}^n \left| \Delta u_{-\frac{1}{2}}^{p-\frac{1}{2}} \right|$$

l'est aussi. Le lemme suivant montre que ceci est vérifié.

Lemme 5.2.

On suppose que les conditions CFL (5.24) et sous-caractéristique (5.23) sont vérifiées. Alors, on a

$$\sum_{p=1}^n \left| \Delta u_{-\frac{1}{2}}^{p-\frac{1}{2}} \right| \leq CVT(u_0), \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (5.34)$$

où la constante C ne dépend ni de Δt ni de Δx .

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}$. De (5.22), on peut écrire

$$\begin{aligned} \Delta u_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} &= \Delta u_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \Delta f_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - \Delta f_{j-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \right\} \\ &= \Delta u_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ f_{j+\frac{1}{2}}^{m-\frac{1}{2}} \Delta u_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - f_{j-\frac{1}{2}}^{m-\frac{1}{2}} \Delta u_{j-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \right\}, \end{aligned}$$

où $\Delta f_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} = f(u_{j+\frac{1}{2}}^n) - f(u_{j+\frac{1}{2}}^{n-1})$ et $f_{j+\frac{1}{2}}^{m-\frac{1}{2}}$ désigne $\frac{\Delta f_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta u_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}}$ si $\Delta u_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \neq 0$ (qui vaut $f'(\xi_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}})$, avec $\xi_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}$ est entre $u_{j+\frac{1}{2}}^n$ et $u_{j+\frac{1}{2}}^{n-1}$). On a donc

$$\Delta u_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \Delta u_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} f_{j+\frac{1}{2}}^{m-\frac{1}{2}} \right) + \frac{\Delta t}{\Delta x} f_{j-\frac{1}{2}}^{m-\frac{1}{2}} \Delta u_{j-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}.$$

Vues les conditions CFL et sous-caractéristique, on a $\frac{\Delta t}{\Delta x} f_{j+\frac{1}{2}}^{m-\frac{1}{2}} \leq 1$, et on obtient alors

$$\left| \Delta u_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right| \leq \left| \Delta u_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \right| + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ f_{j-\frac{1}{2}}^{m-\frac{1}{2}} \left| \Delta u_{j-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \right| - f_{j+\frac{1}{2}}^{m-\frac{1}{2}} \left| \Delta u_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \right| \right\}.$$

En sommant les deux membres de cette inégalité pour $j < 0$, on déduit

$$\sum_{j < 0} \left| \Delta u_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right| \leq \sum_{j < 0} \left| \Delta u_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \right| - \frac{\Delta t}{\Delta x} f_{-\frac{1}{2}}^{m-\frac{1}{2}} \left| \Delta u_{-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \right|,$$

inégalité qui peut être écrite sous la forme

$$\sum_{j<0} \left| \Delta u_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right| - \sum_{j<0} \left| \Delta u_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \right| + \frac{\Delta t}{\Delta x} f'^{n-\frac{1}{2}} \left| \Delta u_{-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \right| \leq 0.$$

On somme, maintenant sur n , les deux membres de l'inégalité ci-dessus. On obtient

$$\sum_{j<0} \left| \Delta u_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right| + \frac{\Delta t}{\Delta x} \sum_{p=1}^n f'^{p-\frac{1}{2}} \left| \Delta u_{-\frac{1}{2}}^{p-\frac{1}{2}} \right| \leq \sum_{j<0} \left| \Delta u_{j+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \right|,$$

l'inégalité qui nous intéresse étant

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \sum_{p=1}^n f'^{p-\frac{1}{2}} \left| \Delta u_{-\frac{1}{2}}^{p-\frac{1}{2}} \right| \leq \sum_{j<0} \left| \Delta u_{j+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \right|.$$

Or

$$\begin{aligned} \left| \Delta u_{j+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \right| &= \left| u_{j+\frac{1}{2}}^1 - u_{j+\frac{1}{2}}^0 \right| = \frac{\Delta t}{\Delta x} \left| f_{j+\frac{1}{2}}^0 - f_{j-\frac{1}{2}}^0 \right| \\ &= \frac{\Delta t}{\Delta x} f'_{j+\frac{1}{2}}{}^0 \left| \Delta u_j^0 \right|, \end{aligned}$$

d'où l'on conclut que

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \sum_{p=1}^n f'^{p-\frac{1}{2}} \left| \Delta u_{-\frac{1}{2}}^{p-\frac{1}{2}} \right| \leq \frac{\Delta t}{\Delta x} \sum_{j<0} f'_{j+\frac{1}{2}}{}^0 \left| \Delta u_j^0 \right|.$$

Comme $f'(u) > 0$, $\forall u \in K$, f' est minorée sur K par une constante strictement positive, ce qui conclut la preuve du lemme. \square

5.3.2 Convergence du schéma numérique couplé lorsque $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$

Dans cette section nous nous intéressons à la convergence du schéma numérique (5.22)-(5.18) lorsque $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$, et à $\varepsilon > 0$ fixé. Comme au chapitre 3, les estimations établies au paragraphe précédent permettent de montrer la compacité des suites discrètes $(u_\Delta)_{\Delta t, \Delta x}$ et $(v_\Delta)_{\Delta t, \Delta x}$ dans l'espace des fonctions à variation bornée.

Théorème 5.2.

Soit $u_0 \in BV(\mathbb{R})$ tel que $u_0(x) \in K$, $\forall x \in \mathbb{R}$, et $\varepsilon > 0$ fixé. On suppose que les conditions sous-caractéristique (5.23) et CFL (5.24) sont vérifiées. Alors il existe des sous-suites $(u_\Delta)_\Delta$, $(v_\Delta)_\Delta$ et des fonctions

$$\begin{cases} u \in L^\infty(\mathbb{R} \times [0, +\infty[) \cap BV(\mathbb{R} \times [0, T]) \cap L^1_{loc}(\mathbb{R} \times [0, +\infty[), \\ v \in L^\infty(\mathbb{R}^+ \times [0, +\infty[) \cap BV(\mathbb{R}^+ \times [0, T]) \cap L^1_{loc}(\mathbb{R}^+ \times [0, +\infty[), \end{cases}$$

pour tout $T > 0$, et tels que $\frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, t)$, $\frac{\partial v}{\partial t}(\cdot, t)$ sont uniformément bornés comme mesures finies, tels que

$$(u_\Delta, v_\Delta) \longrightarrow (u, v) \quad L^1_{loc}(\mathbb{R} \times [0, +\infty[) \times L^1_{loc}(\mathbb{R}^+ \times [0, +\infty[),$$

lorsque $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$, $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ étant constant. De plus, u est solution, dans l'ensemble $] -\infty, 0[\times [0, +\infty[$, de l'équation (3.15) et le couple (u, v) est solution, dans l'ensemble $]0, +\infty[\times [0, +\infty[$, du système de relaxation (3.1).

Démonstration.

La preuve est analogue à celle du Théorème 3.6. De l'estimation (5.25), on peut conclure que les fonctions u_Δ et v_Δ définies par (5.17) sont uniformément bornées dans $L^\infty(\mathbb{R} \times [0, +\infty[)$ et dans $L^\infty(\mathbb{R}^+ \times [0, +\infty[)$, respectivement, et de l'estimation (5.26) on conclut que

$$VT(u_\Delta(\cdot, t)) \leq C, \quad VT(v_\Delta(\cdot, t)) \leq C, \quad \forall t > 0.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \left\| \frac{u_\Delta(\cdot, t + \Delta t) - u_\Delta(\cdot, t)}{\Delta t} \right\|_{L^1(\mathbb{R})} &= \frac{1}{\Delta t} \int_{\mathbb{R}} |u_\Delta(x, t + \Delta t) - u_\Delta(x, t)| \, dx = \\ &= \frac{1}{\Delta t} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \left| u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - u_{j+\frac{1}{2}}^n \right| \, dx = \\ &= \frac{\Delta x}{\Delta t} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - u_{j+\frac{1}{2}}^n \right| \\ &\leq C VT(u_0), \end{aligned}$$

d'après l'estimation (5.27) et du lemme 5.2. On conclut pour la suite v_Δ un résultat analogue. On a donc les estimations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \|(u_\Delta, v_\Delta)\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times [0, +\infty[) \times L^\infty(\mathbb{R}^+ \times [0, +\infty[)} \leq C, \\ VT(u_\Delta(\cdot, t)), VT(v_\Delta(\cdot, t)) \leq C, \\ \left\| \left(\frac{u_\Delta(\cdot, t + \Delta t) - u_\Delta(\cdot, t)}{\Delta t}, \frac{v_\Delta(\cdot, t + \Delta t) - v_\Delta(\cdot, t)}{\Delta t} \right) \right\|_{L^1(\mathbb{R}) \times L^1(\mathbb{R}^+)} \leq C, \end{array} \right. \quad (5.35)$$

où la constante C ne dépende ni de Δt , ni de Δx (ni de ε), $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ étant constant. Comme dans la preuve du Théorème 3.6, ces estimations sont suffisantes pour conclure l'existence d'une sous-suite de (u_Δ, v_Δ) et de fonctions (u, v) vérifiant les conditions énoncées dans le théorème. Maintenant, encore en utilisant les mêmes techniques que dans la preuve du Théorème 3.6, on prouve que u est une solution faible de la loi de conservation scalaire (3.15) dans $] -\infty, 0[\times [0, +\infty[$ et que le couple (u, v) est solution du système de relaxation (3.1) dans $]0, +\infty[\times [0, +\infty[$, en multipliant les équations discrètes pour u et pour (u, v) par une fonction teste φ respectivement dans $C_0^1(]-\infty, 0[\times [0, +\infty[)$ et dans $C_0^1(]0, +\infty[\times [0, +\infty[)$. \square

5.3.3 Convergence à la frontière

Dans ce paragraphe, on analyse la convergence du schéma numérique au niveau de l'interface $x = 0$. Le théorème précédent établit que les suites u_Δ et v_Δ convergent vers des fonctions u et v telles que u et le couple (u, v) sont solution respectivement de la loi de conservation scalaire et du système de relaxation dans chacun des domaines $] -\infty, 0[\times [0, +\infty[$ et $]0, +\infty[\times [0, +\infty[$. Le même résultat est aussi valable dans les variables w et z . Vu que la limite u appartient à l'espace BV , u a une trace en $x = 0^-$ et en $x = 0^+$, respectivement $u(0^-, t)$ et $u(0^+, t)$. De même, v , w et z admettent des

traces en $x = 0^+$, respectivement $v(0^+, t)$, $w(0^+, t)$ et $z(0^+, t)$. De plus, on dispose des formules de Green suivantes :

Dans le domaine $] - \infty, 0] \times [0, +\infty[$,

$$\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^0 \left\{ u(x, t) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) + f(u(x, t)) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) \right\} dx dt + \int_{-\infty}^0 u_0(x) \varphi(x, 0) dx - \int_0^{+\infty} f(u(0^-, t)) \varphi(0, t) dt = 0, \quad (5.36)$$

pour toute fonction $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^- \times [0, +\infty[)$;

Dans le domaine $[0, +\infty[\times [0, +\infty[$,

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \left\{ w(x, t) \frac{\partial \psi}{\partial t}(x, t) + aw(x, t) \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, t) \right\} dx dt + \int_0^{+\infty} w_0(x) \psi(x, 0) dx + \int_0^{+\infty} aw(0^+, t) \psi(0, t) dt = -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} (f(u) - v) dx dt, \quad (5.37)$$

pour toute fonction $\psi \in C_0^1(\mathbb{R}^+ \times [0, +\infty[)$. On dispose de formules similaires pour v et pour z .

Notre but est de montrer que les suites discrètes u_Δ et v_Δ convergent, au niveau de l'interface $x = 0$, vers les traces des fonctions u et v . Pour ce faire, il suffira d'étudier la convergence des suites $u_\Delta(0^-, t)$ et $z_\Delta(0^+, t)$ définies respectivement par

$$u_\Delta(0^-, t) = u_{-\frac{1}{2}}^n, \\ z_\Delta(0^+, t) = z_{\frac{1}{2}}^n,$$

pour $t_n \leq t < t_{n+1}$. Encore une fois, nous allons montrer que la variation totale de ces fonctions est bornée sur $[0, T]$, pour tout $T > 0$. Or, d'une part, on a d'après le lemme 5.2, que la quantité

$$\sum_{n=0}^{N-1} |u_{-\frac{1}{2}}^{n+1} - u_{-\frac{1}{2}}^n| = \sum_{n=0}^{N-1} |\Delta u_{-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}|$$

est bornée, indépendamment de Δt et de Δx .

Nous allons d'abord montrer que l'on a un résultat analogue pour $|\Delta z_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}|$:

Lemme 5.3.

On suppose que les conditions CFL (5.24) et sous-caractéristique (5.23) sont vérifiées. Alors on a

$$\sum_{n=0}^{N-1} \left| \Delta z_{\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right| \leq CVT(u_0), \quad \forall N \in \mathbb{N}, \quad (5.38)$$

où la constante C ne dépend ni de Δt , ni de Δx (ni de ε).

Démonstration.

On a

$$\begin{aligned}\Delta z_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} &= \Delta z_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} + a \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\Delta z_{j+\frac{3}{2}}^{n-\frac{1}{2}} - \Delta z_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \right) + \frac{\Delta t}{\varepsilon} \left\{ \Delta f_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \Delta v_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right\} \\ &= \Delta z_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \left(1 - a \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) + a \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta z_{j+\frac{3}{2}}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{\varepsilon} \left\{ \Delta f_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \Delta v_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right\}\end{aligned}$$

et, de manière analogue,

$$\Delta w_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \Delta w_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \left(1 - a \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) + a \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta w_{j-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{\varepsilon} \left\{ \Delta f_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \Delta v_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right\},$$

d'où l'on conclut, d'une part,

$$\left| \Delta z_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{\varepsilon} \left\{ \Delta f_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \Delta v_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right\} \right| \leq \left| \Delta z_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \right| + a \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \left| \Delta z_{j+\frac{3}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \right| - \left| \Delta z_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \right| \right\}$$

et, d'autre part,

$$\left| \Delta w_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{\varepsilon} \left\{ \Delta f_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \Delta v_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right\} \right| \leq \left| \Delta w_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \right| + a \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \left| \Delta w_{j-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \right| - \left| \Delta w_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \right| \right\}.$$

Ainsi que l'on a fait dans les preuves des lemmes 3.5 et (5.1), on obtient encore une fois

$$\begin{aligned}\left| \Delta w_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right| + \left| \Delta z_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right| &\leq \\ \left| \Delta w_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{\varepsilon} \left\{ \Delta f_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \Delta v_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right\} \right| &+ \left| \Delta z_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{\varepsilon} \left\{ \Delta f_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \Delta v_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right\} \right|,\end{aligned}$$

ce qui nous permet de conclure que

$$\begin{aligned}\left| \Delta w_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right| + \left| \Delta z_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right| &\leq \\ \left| \Delta w_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \right| + \left| \Delta z_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \right| &+ a \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \left| \Delta w_{j-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \right| - \left| \Delta w_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \right| \right\} + a \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \left| \Delta z_{j+\frac{3}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \right| - \left| \Delta z_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \right| \right\}.\end{aligned}$$

On somme maintenant les deux membres de l'inégalité en haut pour $j \geq 0$. On obtient

$$\sum_{j \geq 0} \left| \Delta w_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right| + \left| \Delta z_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right| \leq \sum_{j \geq 0} \left| \Delta w_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \right| + \left| \Delta z_{j+\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \right| + a \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \left| \Delta w_{-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \right| - \left| \Delta z_{\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \right| \right\}.$$

On somme, cette fois pour n entre 1 et N , les deux membres de cette inégalité. On obtient

$$\sum_{j \geq 0} \left| \Delta w_{j+\frac{1}{2}}^{N+\frac{1}{2}} \right| + \left| \Delta z_{j+\frac{1}{2}}^{N+\frac{1}{2}} \right| \leq \sum_{j \geq 0} \left| \Delta w_{j+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \right| + \left| \Delta z_{j+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \right| + a \frac{\Delta t}{\Delta x} \sum_{n=1}^N \left| \Delta w_{-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \right| - \left| \Delta z_{\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \right|,$$

l'inégalité que nous intéresse étant

$$a \frac{\Delta t}{\Delta x} \sum_{n=1}^N \left| \Delta z_{\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \right| \leq \sum_{j \geq 0} \left| \Delta w_{j+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \right| + \left| \Delta z_{j+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \right| + a \frac{\Delta t}{\Delta x} \sum_{n=1}^N \left| \Delta w_{-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \right|. \quad (5.39)$$

Or on vérifie que

$$\begin{aligned} \Delta w_{j+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} &= w_{j+\frac{1}{2}}^1 - w_{j+\frac{1}{2}}^0 = -a \frac{\Delta t}{\Delta x} (w_{j+\frac{1}{2}}^0 - w_{j-\frac{1}{2}}^0) + \frac{\Delta t}{\varepsilon} \left\{ f_{j+\frac{1}{2}}^1 - v_{j+\frac{1}{2}}^1 \right\} \\ &= -a \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta w_j^0 + \frac{\Delta t}{\varepsilon} \left\{ \Delta f_{j+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} - \Delta v_{j+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \right\}, \end{aligned}$$

vu que $f_{j+\frac{1}{2}}^0 = v_{j+\frac{1}{2}}^0$, pour tout $j \geq 0$. De manière analogue, on a

$$\Delta z_{j+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = a \frac{\Delta t}{\Delta x} \Delta z_{j+1}^0 + \frac{\Delta t}{\varepsilon} \left\{ \Delta f_{j+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} - \Delta v_{j+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \right\},$$

et encore une fois on obtient

$$\begin{aligned} \left| \Delta w_{j+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \right| + \left| \Delta z_{j+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \right| &\leq \\ \left| \Delta w_{j+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{\varepsilon} \left\{ \Delta f_{j+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} - \Delta v_{j+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \right\} \right| + \left| \Delta z_{j+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{\varepsilon} \left\{ \Delta f_{j+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} - \Delta v_{j+\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \right\} \right| &\leq \\ a \frac{\Delta t}{\Delta x} \{ |\Delta w_j^0| + |\Delta z_{j+1}^0| \}. & \end{aligned}$$

D'un autre côté, comme l'on a justifié avant le lemme 5.2, le dernier terme du membre de droite de l'inégalité (5.39) est bornée par

$$2a \sum_{n=1}^N \left| \Delta u_{-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \right|.$$

De l'inégalité (5.39) on obtient ainsi que

$$a \frac{\Delta t}{\Delta x} \sum_{n=1}^N \left| \Delta z_{\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \right| \leq a \frac{\Delta t}{\Delta x} \sum_{j \geq 0} |\Delta w_j^0| + |\Delta z_{j+1}^0| + a \frac{\Delta t}{\Delta x} \sum_{n=1}^N 2a \left| \Delta u_{-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \right|,$$

et donc, d'après le lemme 5.2, on a

$$\sum_{n=1}^N \left| \Delta z_{\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \right| \leq CVT(u_0),$$

ce qui finit la preuve du lemme. \square

Les lemmes (5.2) et (5.3) permettent d'établir une estimation uniforme en Δt de la variation totale des suites $u_{\Delta}(0^-, t)$ et $z_{\Delta}(0^-, t)$, dans chaque ouvert bornée de $[0, +\infty[$. En appliquant le théorème de compacité de Helly, on peut alors conclure le résultat suivant :

Lemme 5.4.

Il existe des fonctions u^- et $z^+ \in L^\infty([0, +\infty[) \cap BV[0, T]$, pour tout $T > 0$, telles que

$$\begin{cases} u_\Delta(0^-, t) \longrightarrow u^-(t), \text{ p.p. } t > 0, \\ z_\Delta(0^+, t) \longrightarrow z^+(t), \text{ p.p. } t > 0 \end{cases}$$

(à une sous-suite près), lorsque $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$, $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ étant constant.

On peut désormais présenter le résultat final de convergence :

Théorème 5.3.

Les fonctions u^- et z^+ sont respectivement les traces $u(0^-, t)$ et $z(0^+, t)$ des fonctions u et z données par la limite des suites $(u_\Delta)_\Delta$ et $(z_\Delta)_\Delta$. On a de plus, $w(0^+, t) = f(u(0^-, t)) + au(0^-, t)$, et donc les fonctions u et v sont telles que le couple (u, v) est solution du problème couplé (5.1).

Démonstration.

Soient $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R}^- \times [0, +\infty[)$, $\psi \in C_0^1(\mathbb{R}^+ \times [0, +\infty[)$. On multiplie d'abord le membre de gauche et de droite de (5.20) par $\Delta t \Delta x \varphi_{j+\frac{1}{2}}^n$, où $\varphi_{j+\frac{1}{2}}^n$ est défini comme dans la preuve du théorème 3.6 (cf. chapitre 3), et on somme les deux membres pour $n \geq 0$ et pour $j \leq -1$. On obtient (cf. démonstration du même théorème)

$$\begin{aligned} \Delta t \Delta x \sum_{n \geq 1} \sum_{j \leq -1} u_{j+\frac{1}{2}}^n \frac{\varphi_{j+\frac{1}{2}}^{n-1} - \varphi_{j+\frac{1}{2}}^n}{\Delta t} - \Delta x \sum_{j \leq -1} u_{j+\frac{1}{2}}^0 \varphi_{j+\frac{1}{2}}^0 \\ + \Delta t \Delta x \sum_{n \geq 0} \sum_{j \leq -1} f_{j-\frac{1}{2}}^n \frac{\varphi_{j-\frac{1}{2}}^n - \varphi_{j+\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} + \Delta t \sum_{n \geq 0} f_{-\frac{1}{2}}^n \varphi_{-\frac{1}{2}}^n = 0. \end{aligned} \quad (5.40)$$

La limite, lorsque $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$, des trois premiers termes de l'égalité précédente est calculée comme au Théorème 3.6. En ce qui concerne le dernier, on a

$$\begin{aligned} \Delta t \sum_{n \geq 0} f_{-\frac{1}{2}}^n \varphi_{-\frac{1}{2}}^n &= \Delta t \sum_{n \geq 0} f(u_{-\frac{1}{2}}^n) \varphi_{-\frac{1}{2}}^n = \\ &= \int_0^{+\infty} f(u_\Delta(0^-, t)) \varphi_\Delta(0^-, t) dt \\ &\xrightarrow{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} f(u^-(t)) \varphi(0, t) dt. \end{aligned}$$

On obtient donc, en passant à la limite lorsque $\Delta t, \Delta x \rightarrow 0$ dans (5.40),

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^0 \left\{ u(x, t) \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) + f(u(x, t)) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) \right\} dx dt \\ + \int_{-\infty}^0 u_0(x) \varphi(x, 0) dx - \int_0^{+\infty} f(u^-(t)) \varphi(0, t) dt = 0. \end{aligned}$$

D'autre part, puisque la formule de Green (5.36) est valable pour toute fonction $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^- \times [0, +\infty[)$, on conclut que u^- est telle que

$$\int_0^{+\infty} f(u^-(t)) \varphi(0, t) dt = \int_0^{+\infty} f(u(0^-, t)) \varphi(0, t) dt.$$

Cette égalité étant valable pour toute fonction teste φ , on conclut que

$$f(u^-(t)) = f(u(0^-, t)), \text{ p.p. } t > 0, \quad (5.41)$$

et donc, puisque $f' > 0$,

$$u^-(t) = u(0^-, t), \text{ p.p. } t > 0.$$

On multiplie maintenant les deux membres de la première équation de (5.21) par $\Delta t \Delta x \psi_{j+\frac{1}{2}}^n$ et on somme sur $n \geq 0$ et sur $j \geq 0$. On obtient

$$\begin{aligned} & \Delta t \Delta x \sum_{n \geq 0} \sum_{j \geq 0} \frac{w_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - w_{j+\frac{1}{2}}^n}{\Delta t} \psi_{j+\frac{1}{2}}^n \\ & + a \Delta t \Delta x \sum_{n \geq 0} \sum_{j \geq 0} \frac{w_{j+\frac{1}{2}}^n - w_{j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta x} \psi_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{\Delta t \Delta x}{\varepsilon} \sum_{n \geq 0} \sum_{j \geq 0} \left(f_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - v_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} \right) \psi_{j+\frac{1}{2}}^n, \end{aligned} \quad (5.42)$$

égalité qui peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} & \Delta t \Delta x \sum_{n \geq 1} \sum_{j \geq 0} w_{j+\frac{1}{2}}^n \frac{\psi_{j+\frac{1}{2}}^{n-1} - \psi_{j+\frac{1}{2}}^n}{\Delta t} - \Delta x \sum_{j \geq 0} w_{j+\frac{1}{2}}^0 \psi_{j+\frac{1}{2}}^0 \\ & + a \Delta t \Delta x \sum_{n \geq 0} \sum_{j \geq 0} w_{j+\frac{1}{2}}^n \frac{\psi_{j+\frac{1}{2}}^n - \psi_{j+\frac{3}{2}}^n}{\Delta x} - a \Delta t \sum_{n \geq 0} w_{-\frac{1}{2}}^n \psi_{\frac{1}{2}}^n \\ & = \frac{\Delta t \Delta x}{\varepsilon} \sum_{n \geq 0} \sum_{j \geq 0} \left(f_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - v_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} \right) \psi_{j+\frac{1}{2}}^n, \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} & \int_{\Delta t}^{+\infty} \int_0^{+\infty} w_{\Delta}(x, t) \frac{\psi_{\Delta}(x, t - \Delta t) - \psi_{\Delta}(x, t)}{\Delta t} dx dt - \int_0^{+\infty} w_{\Delta}(x, 0^+) \psi_{\Delta}(x, 0^+) dx \\ & + a \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} w_{\Delta}(x, t) \frac{\psi_{\Delta}(x, t) - \psi_{\Delta}(x + \Delta x, t)}{\Delta x} \\ & - a \int_0^{+\infty} (f(u_{\Delta}(0^-, t)) + a u_{\Delta}(0^-, t)) \psi_{\Delta}(0, t) dt \\ & = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} (f(u_{\Delta}(x, t + \Delta t)) - v_{\Delta}(x, t + \Delta t)) \psi_{\Delta}(x, t) dx dt. \end{aligned}$$

On passe maintenant à la limite, lorsque Δt et $\Delta x \rightarrow 0$, dans les deux membres de l'égalité en haut. On obtient

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \left(w \frac{\partial \psi}{\partial t} + a w \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dx dt + \int_0^{+\infty} w_0(x) \psi(x, 0) dx \\ & + a \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} (f(u^-(t)) + a u^-(t)) \psi(0, t) dt \\ & = -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} (f(u) - v) \psi(x, t) dx dt. \end{aligned}$$

Comme $u(0^-, t) = u^-(t)$, l'égalité ci-dessus s'écrit

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \left(w \frac{\partial \psi}{\partial t} + aw \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) dx dt + \int_0^{+\infty} w_0(x) \psi(x, 0) dx \\ + a \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} (f(u(0^-, t)) + au(0^-, t)) \psi(0, t) dt \\ = -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} (f(u) - v) \psi(x, t) dx dt. \end{aligned}$$

On obtient alors, d'après la formulation de Green (5.37), $w(0^+, t) = f(u(0^-, t)) + au(0^-, t)$. Si l'on procède de manière similaire pour z , on conclut également que $z(0^+, t) = z^+(t)$. Ceci finit la preuve du théorème. \square

5.4 Résultats numériques

Nous présentons dans cette section les résultats que nous avons obtenus après avoir mis en oeuvre le schéma couplé décrit à la section précédente, pour un problème de Riemann et dans le cas de l'équation de Burgers (on a donc considérée des données initiales à valeurs positives). Le domaine spatial que nous considérons dans tous les exemples est l'intervalle $[-1, 1]$. Nous avons effectué des tests numériques dans deux situations. Premièrement nous avons considéré le cas d'un choc qui traverse l'interface. Nous avons pris comme donnée initiale une donnée de Riemann dont la discontinuité se place en $x = -\frac{1}{2}$ et prenant les valeurs 2, pour $x < -\frac{1}{2}$ et 1, pour $x > -\frac{1}{2}$. Dans un deuxième temps, nous avons testé le cas d'une raréfaction, en considérant une donnée initiale dont la discontinuité se place aussi en $x = -\frac{1}{2}$ et prenant les valeurs 1, pour $x < -\frac{1}{2}$ et 2, pour $x > -\frac{1}{2}$. La donnée initiale pour v est à l'équilibre. Nous représentons dans les figures suivantes les résultats que nous avons obtenus pour la fonction u , avec un temps de relaxation *petit*, de l'ordre de 10^{-3} . Dans ce cas, la solution u_ε du schéma de relaxation, à droite, est proche de la solution u de la loi de conservation scalaire (3.15), comme l'on a vérifié au chapitre 3.

Le cas d'un choc qui traverse l'interface

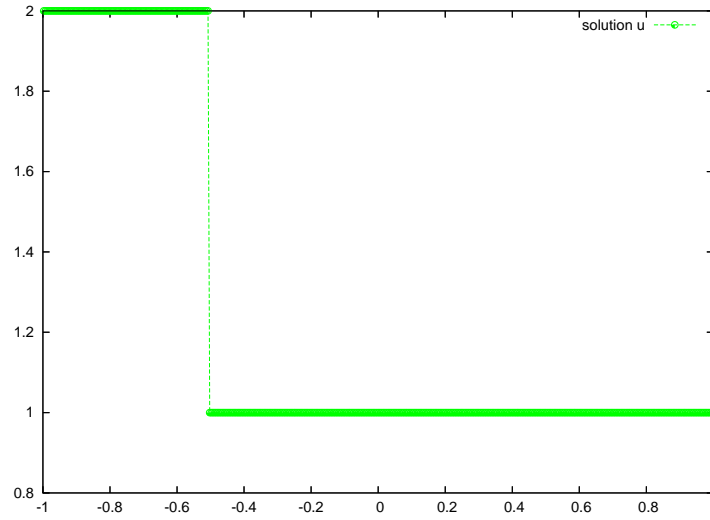
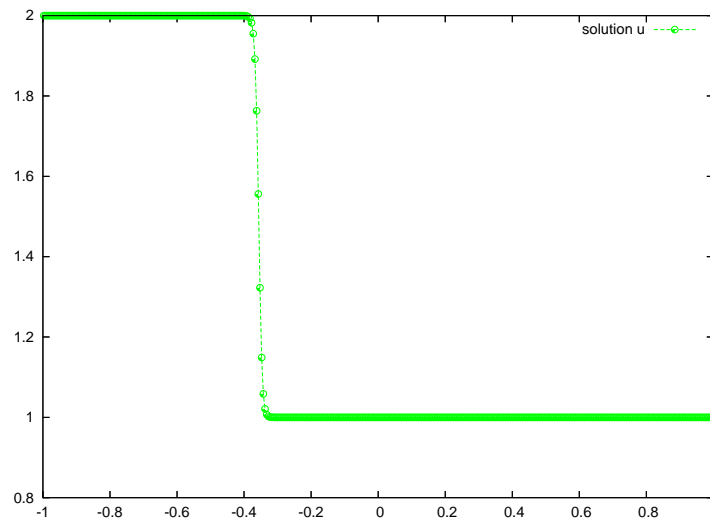


FIG. 5.1 – Donnée initiale

FIG. 5.2 – Solution u au temps $t = 0.1$: le choc se place « avant » l'interface

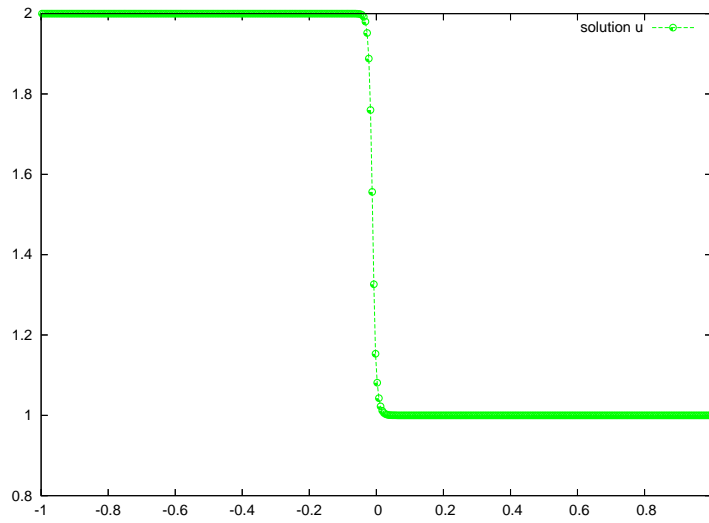


FIG. 5.3 – Solution u au temps $t \approx \frac{1}{3}$: le choc traverse l'interface.

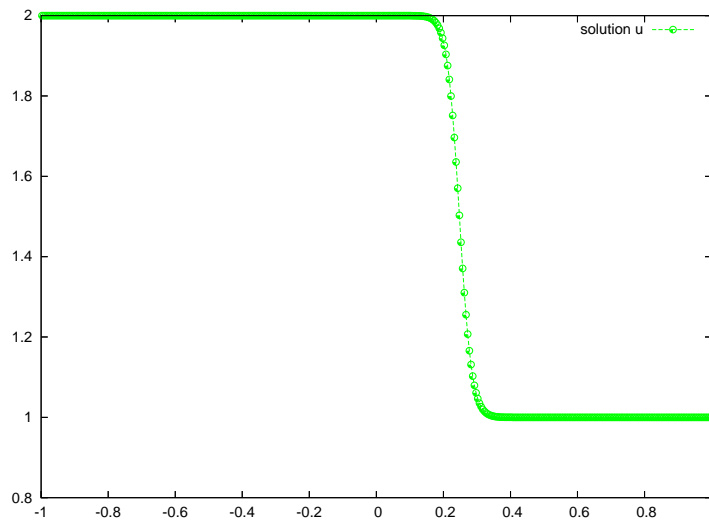


FIG. 5.4 – Solution u au temps $t = 0.5$.

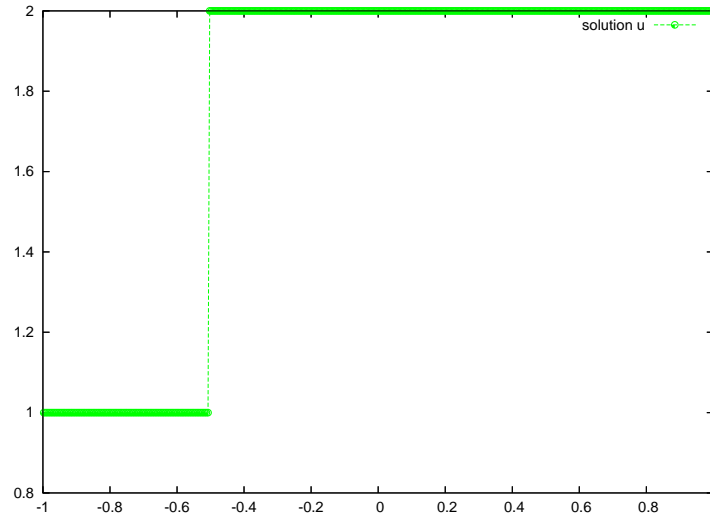
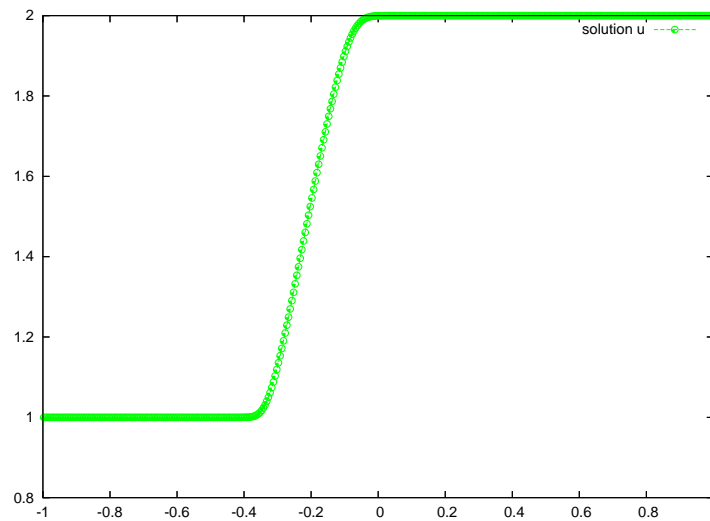
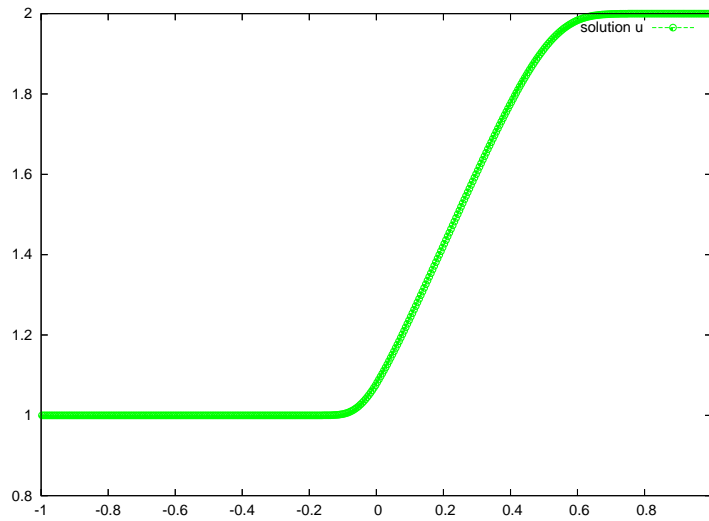
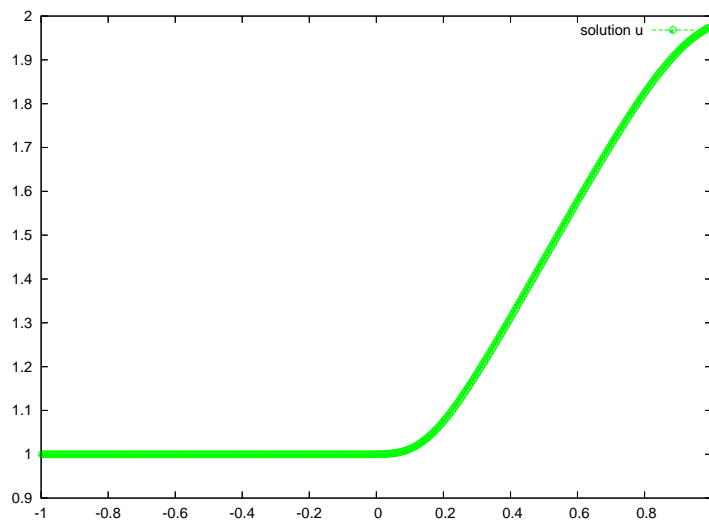
Le cas d'une raréfaction qui traverse l'interface

FIG. 5.5 – Donnée initiale

FIG. 5.6 – Solution u au temps $t = 0.2$: la raréfaction a lieu « avant » l'interface

FIG. 5.7 – Solution u au temps $t = 0.5$: la raréfaction traverse l'interface.FIG. 5.8 – Solution u au temps $t = 0.7$: la raréfaction a lieu « après » l'interface

Troisième partie

Le couplage entre le système de la dynamique des gaz et le système HRM

Introduction

Ce chapitre concerne le couplage de systèmes hyperboliques d'équations aux dérivées partielles issus de la thermohydraulique. La motivation pour l'étude de ce type de problème repose sur la modélisation de certains systèmes de grande complexité qui sont plus facilement abordables quand leurs différentes composantes sont décrites par un modèle précis. En effet, dans la simulation numérique de systèmes à plusieurs composantes ou ayant un domaine de définition de géométrie complexe, on utilise fréquemment des modèles mathématiques différents pour décrire plus précisément chaque composante ou chaque partie du domaine. Du point de vue théorique, cette procédure consiste à coupler deux systèmes d'équations aux dérivées partielles séparés par une interface, qui n'est pas physique, au sens où elle n'est pas présente dans le vrai modèle mais a été introduite fictivement pour marquer la séparation des composantes modélisées.

Un contexte où ce type de procédure apparaît est celui du couplage de modèles mathématiques ou de codes numériques décrivant la thermohydraulique des réacteurs nucléaires. Les modèles utilisés dans la thermohydraulique des réacteurs nucléaires sont des modèles hyperboliques de très grande complexité, décrivant des phénomènes de changement de phase et qui doivent prendre en compte les différentes composantes des réacteurs. Dans le but de décrire avec précision ces modèles, ce qui s'avère être une tâche difficile, plusieurs travaux ont porté sur des modèles plus simples, qui sont néanmoins représentatifs des problèmes qui se posent dans l'analyse théorique et la modélisation numérique de modèles plus complexes. C'est l'exemple de la série de travaux présentés dans [ACC+05a], [ACC+05b], [ACC+05d] et [CRS], où les auteurs font une analyse mathématique et numérique du couplage de deux systèmes de la dynamique des gaz avec des lois d'état différents (cf. [ACC+05d], [CRS]) et du couplage entre le *système homogène à l'équilibre*, dit HEM (de l'anglais Homogeneous Equilibrium Model), et le *système homogène de relaxation*, dit HRM (de Homogeneous Relaxation Model)(cf. [ACC+05a], [ACC+c]). Le premier modélise de façon simple la dynamique d'un changement de phase et le deuxième correspond à une version de relaxation du premier.

Le mouvement d'un fluide compressible non visqueux peut être décrit, en dimension

1, par le *système d'Euler de la dynamique des gaz* (écrit ici en variables Euleriennes)

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \frac{\partial}{\partial x}((\rho e + p)u) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Ci-dessus, ρ est la densité du fluide, u la vitesse de l'écoulement et $e = \frac{1}{2}u^2 + \varepsilon$ l'énergie totale spécifique, donnée par la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie interne spécifique ε . Les trois équations de (1) décrivent respectivement les lois de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie totale pour l'écoulement d'un tel fluide, sous l'hypothèse que son évolution a lieu selon une *équation d'état* qui ferme le système en exprimant la pression p en fonction de ρ et de ε ou d'autres variables thermodynamiques.

Bien que ce modèle soit en effet une limite de modèles hydrodynamiques plus complexes, qui tiennent compte des termes de second membre tels que sources de chaleur et forces externes, fermé par une loi d'état vérifiant les principes fondamentaux de la thermodynamique, il est une approximation adéquate pour de nombreux écoulements gazeux et liquides. L'exemple le plus connu est certainement celui d'un gaz parfait polytropique, pour lequel

$$p(\rho, \varepsilon) = (\gamma - 1)\rho\varepsilon, \quad (2)$$

où $\gamma > 1$ est une constante donnée. Dans un contexte générale, ce modèle décrit de phénomènes plus complexes tels que des transitions de phase.

Dans les travaux [ACC+05a], [ACC+05b] et [ACC+c], les auteurs considèrent, dans le contexte du couplage de codes numériques pour les écoulements diphasiques, deux modèles différents qui sont, d'une part, le système homogène à l'équilibre et, d'autre part, le système homogène de relaxation. La problématique du changement de phase introduit plusieurs « pathologies » du point de vue de la théorie des équations aux dérivées partielles hyperboliques, la plus contraignante étant la perte de l'hyperbolicité dans la zone de phase mixte. Dans les travaux cités, des modèles simplifiés sont pris en compte, pour lesquels ce problème ne se présente pas. Le modèle HEM considéré correspond au système (1) muni de la loi de pression

$$p = p_E(\rho, \varepsilon) = \begin{cases} (\gamma_1 - 1)\rho\varepsilon, & \rho \leq \rho_1^*, \\ (\gamma_1 - 1)\rho_1^*\varepsilon = (\gamma_2 - 1)\rho_2^*\varepsilon, & \rho_1^* \leq \rho \leq \rho_2^*, \\ (\gamma_2 - 1)\rho\varepsilon, & \rho \geq \rho_2^*. \end{cases} \quad (3)$$

Cette loi modélise de façon simple la dynamique d'un changement de phase : pour des densités inférieures à ρ_1^* , le fluide est en phase vapeur et pour des densités supérieures à ρ_2^* , en phase liquide, ρ_1^* et ρ_2^* correspondant ainsi à des densités de saturation des phases gazeuse et liquide, respectivement ; pour des densités entre ρ_1^* et ρ_2^* , le fluide est un mélange de gaz et de liquide. En phase pure le fluide évolue selon une loi d'état du type gaz parfait et en présence de mélange les pressions correspondant aux deux phases sont supposées égales.

L'autre modèle considéré est le système homogène de relaxation

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t}(\rho\alpha) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho\alpha u) = \lambda_0\rho(\alpha_{eq}(\rho) - \alpha), \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \frac{\partial}{\partial x}((\rho e + p)u) = 0, \end{array} \right. \quad (4)$$

qui correspond au système de la dynamique des gaz avec une équation supplémentaire de relaxation. La thermodynamique du changement de phase est décrite ici par la loi de pression p et par l'équation de relaxation

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\alpha) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho\alpha u) = \lambda_0\rho(\alpha_{eq}(\rho) - \alpha).$$

La nouvelle variable α correspond à un taux de présence de la phase vapeur dans le mélange et l'équation précédente décrit en quelque sorte les transferts de masse entre les deux phases, au cours d'un processus de relaxation qui a lieu. La pression p dépend désormais du taux α . Elle prend la forme

$$p = p_R(\alpha, \rho, \varepsilon) = (\gamma_1\alpha + \gamma_2(1 - \alpha) - 1)\rho\varepsilon.$$

Quand le temps de relaxation $\frac{1}{\lambda_0} \rightarrow 0$, le taux α tend vers un taux d'équilibre $\alpha_{eq}(\rho)$ qui vérifie

$$p_R(\alpha_{eq}(\rho), \rho, \varepsilon) = p_E(\rho, \varepsilon),$$

le système HEM correspondant ainsi à l'équilibre de relaxation du système HRM. Nous remarquons que, du point de vue hyperbolique le système augmenté (4) est plus simple que le système HEM. En effet, bien qu'un modèle simplifié, ce système présente un défaut de régularité, sa pression p_E n'étant que de classe C^0 , tandis que la partie convective de (4) correspond à un système avec des *bonnes propriétés hyperboliques*, notamment à un système pour lequel le problème de Riemann est bien posé.

Dans notre travail nous étudions le couplage à une interface fixe, que nous considérons placée en $x = 0$, entre le système de la dynamique des gaz et le système HRM. Dans [ACC+05a] et [ACC+c] plusieurs techniques sont énumérées pour approcher numériquement le problème du couplage HEM-HRM. Nous avons repris une version simplifiée de ce problème, puisque nous ne considérons pas la loi d'état (3), mais nous restreignons à une classe de lois d'état vérifiant une série de propriétés classiques, que nous précisons plus tard. Le but est de faire une étude théorique des conditions de couplage et du problème de Riemann couplé. Ce travail permet, d'un côté, de tester les résultats numériques existants et, d'un autre côté, d'avoir une idée sur le caractère bien posé du modèle de couplage.

Nous décrivons maintenant le plan de cette partie. Dans un premier temps, nous décrivons de manière plus détaillée les deux modèles intervenant dans le couplage que nous étudions, c'est-à-dire le système d'Euler de la dynamique des gaz et le système

HRM. Puisque le problème du couplage fait intervenir la solution du problème de Riemann et en particulier la vitesse des ondes qui la composent, nous étudions les courbes d'onde pour le système d'Euler et pour le système HRM et faisons une analyse sur le signe de la vitesse à laquelle celles-ci se propagent. Enfin nous établissons les conditions de couplage et, dans une dernière partie, nous faisons l'étude du problème de Riemann couplé dans la classe des solutions continues à l'interface.

Le système de la dynamique des gaz et le système HRM

Nous nous intéressons au couplage par état, défini au chapitre 4, entre le système d'Euler de la dynamique des gaz et le système homogène de relaxation. Nous commençons cette troisième partie par une présentation générale de ces deux modèles.

6.1 Les équations d'Euler de la dynamique des gaz

Les équations d'Euler expriment pour un fluide compressible non visqueux les lois de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie totale. En dimension 1, si on note $\rho(t, x)$ la densité, $u(t, x)$ la vitesse et $e(t, x)$ l'énergie totale du fluide (où $t > 0$ est la variable temporelle et $x \in \mathbb{R}$ la variable spatiale), elles s'écrivent

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \frac{\partial}{\partial x}((\rho e + p)u) = 0, \end{cases} \quad (6.1)$$

avec $\rho e = \frac{1}{2}\rho u^2 + \rho \varepsilon$, ε désignant l'énergie interne spécifique. Ces équations ne tiennent pas compte de forces extérieures ou de sources de chaleur. La restriction au cas unidimensionnel peut se justifier par le fait que l'écoulement ait lieu dans une direction privilégiée, les vitesses transversales pouvant ainsi être négligées.

L'évolution du fluide a lieu selon une loi d'état qui permet de fermer le système et qui exprime généralement la pression p en fonction de ρ et de ε . D'après les principes fondamentaux de la thermodynamique, il est connu que deux variables thermodynamiques sont suffisantes pour caractériser l'état d'un fluide en équilibre local. La loi d'état peut ainsi être exprimée en fonction d'autres variables thermodynamiques et prendre la forme

$$p = p(\tau, s), \quad \varepsilon = \varepsilon(\tau, s) = \varepsilon(\tau, p), \quad s = s(\tau, p) = s(\tau, \varepsilon), \quad T = T(\tau, s) = T(\tau, p), \quad \dots$$

(où l'on a, par abus de notation, utilisé la même lettre pour les différentes fonctions), où $\tau = \frac{1}{\rho}$ est le volume spécifique et s et T respectivement l'entropie spécifique et la température, qui peuvent être définies à travers la relation fondamentale de la thermodynamique

$$Tds = d\varepsilon + p d\tau. \quad (6.2)$$

Dans le contexte de l'hydrodynamique classique, la loi d'état est définie par une fonction régulière et les valeurs admissibles pour les variables d'état sont

$$\tau > 0, \quad \varepsilon > 0, \quad p > 0, \quad T > 0.$$

On a alors, d'après (6.2),

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} = -p < 0, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial s} = T > 0.$$

Dans ce cadre, on va assumer l'hypothèse de la stricte convexité de la fonction $(\tau, s) \mapsto \varepsilon(\tau, s)$, ou, de façon équivalente (cf. [GR96]), de la fonction $(\tau, \varepsilon) \mapsto s(\tau, \varepsilon)$. On a alors

$$\frac{\partial p}{\partial \tau}(\tau, s) = -\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \tau^2}(\tau, s) < 0,$$

de sorte que l'on peut définir la vitesse du son en fonction de τ et de s par

$$c^2 = -\tau^2 \frac{\partial p}{\partial \tau}(\tau, s).$$

Remarque 6.1.

La stricte convexité de ε n'est pas toujours vérifiée dans un contexte plus général, comme celui des écoulements diphasiques.

L'exemple le plus connu de loi d'état est certainement celui d'un gaz parfait polytropique, pour lequel

$$p(\rho, \varepsilon) = (\gamma - 1)\rho\varepsilon, \quad (6.3)$$

où $\gamma > 1$ est le coefficient adiabatique. Pour un tel gaz, l'entropie s est définie comme fonction de ε et de ρ , à une constante additive près, par

$$s(\rho, \varepsilon) = C_v \log \left(\frac{\varepsilon}{\rho^{\gamma-1}} \right),$$

et donc

$$\varepsilon(\rho, s) = \rho^{\gamma-1} \exp \left(\frac{s}{C_v} \right),$$

où $C_v = \frac{R}{\gamma-1}$ est la chaleur spécifique, avec R une constante spécifique au gaz. Comme fonction de s et de ρ , la pression p s'écrit alors

$$p(\rho, s) = (\gamma - 1) \exp \left(\frac{s}{C_v} \right) \rho^\gamma = A(s) \rho^\gamma,$$

avec $A(s) = (\gamma - 1) \exp \left(\frac{s}{C_v} \right)$.

Un autre exemple est celui d'une loi d'état du type Grüneisen pour un *stiffened* gaz :

$$p = (\gamma - 1)\rho\varepsilon + c_{ref}^2(\rho - \rho_{ref}).$$

On revient au système (6.1). On peut l'écrire sous la forme générale d'un système conservatif

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F(U) = 0,$$

avec

$$U = (\rho, \rho u, \rho e) \quad \text{et} \quad F(U) = (\rho u, \rho u^2 + p, \rho e u + p u).$$

Les états U prennent leurs valeurs dans l'ensemble

$$\Omega = \{(\rho, \rho u, \rho e) \in \mathbb{R}^3 : \rho > 0, \varepsilon > 0\}.$$

Muni d'une loi d'état vérifiant les hypothèses de la thermodynamique classique, le système d'Euler est un système strictement hyperbolique, les valeurs propres de la matrice jacobienne $DF(U)$ étant donnés, en chaque point $U \in \Omega$, par

$$\lambda_1(U) = u - c < \lambda_2(U) = u < \lambda_3(U) = u + c, \quad (6.4)$$

où la vitesse du son peut s'écrire en fonction de ρ et de p comme

$$c^2(\rho, p) = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \right)^{-1} \left(\frac{p}{\rho} - \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right) = \frac{1}{\rho} \beta(\rho, p).$$

Les champs caractéristiques associés aux première et troisième valeurs propres sont vraiment non linéaires et le champ caractéristique associé à la valeur propre $\lambda_2(u) = u$ est linéairement dégénéré en tout point $U \in \Omega$.

En pratique, on considère souvent le système (6.1) écrit sous une forme non-conservative

$$\frac{\partial V}{\partial t} + B(V) \frac{\partial V}{\partial x} = 0.$$

Nous indiquons quelques choix possibles pour les variables non-conservatives V :

(i) $V = (\rho, u, \varepsilon)$, pour lesquelles

$$B(V) = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \rho} & u & \frac{\partial p}{\partial \varepsilon} \\ 0 & \frac{p}{\rho} & u \end{pmatrix};$$

(ii) $V = (\rho, u, p)$, avec

$$B(V) = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & \frac{1}{\rho} \\ 0 & \beta(\rho, p) & u \end{pmatrix};$$

(iii) $V = (\rho, u, s)$, avec

$$B(V) = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \rho} & u & \frac{\partial p}{\partial s} \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de la matrice $B(V)$ sont toujours données par (6.4), où c peut aussi s'écrire sous la forme

$$c(\rho, \varepsilon) = \left(\frac{p}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial \varepsilon}(\rho, \varepsilon) + \frac{\partial p}{\partial \rho}(\rho, \varepsilon) \right)^{\frac{1}{2}}$$

ou sous la forme

$$c(\rho, s) = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}(\rho, s) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pour un gaz parfait polytropique (de loi d'état (6.3)), on a

$$c(\rho, p) = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}.$$

Dans ce travail nous allons ainsi considérer le système de la dynamique des gaz muni d'une loi d'état vérifiant les propriétés présentées dans cette section. Plus loin on sera aussi amené à supposer la stricte convexité de la fonction

$$\rho \longmapsto p(\rho, s).$$

6.2 Le système HRM

Dans le contexte de la thermohydraulique nucléaire, dans [ACC+05a], [ACC+05b] et [ACC+c], les auteurs considèrent l'écoulement d'un mélange eau-vapeur dont la dynamique est décrite, d'une part, par un modèle à l'équilibre, le modèle homogène à l'équilibre, appelé HEM et, d'autre part, par un modèle de relaxation, le modèle homogène de relaxation, appelé HRM. Ces deux modèles sont unidimensionnels et sont dits homogènes car ils considèrent le mélange diphasique comme étant un seul fluide, qui peut être en phase liquide, vapeur ou de mélange, et qui peut changer de phase. Le modèle HEM considéré correspond au système de la dynamique des gaz avec une loi de pression qui modélise de façon simplifiée un changement de phase. Le modèle HRM correspond à une approximation par relaxation du premier.

Dans notre travail nous avons étudié le problème du couplage entre le système d'Euler et le système HRM. Cette section correspond à une brève description de ce dernier modèle. Nous commençons par décrire la thermodynamique d'un tel mélange diphasique, comme l'ont étudié F. Caro et S. Jaouen (cf. [Car04] et [Jao01]). Nous reprenons ici leurs notions.

6.2.1 Hypothèses générales sur le modèle

On considère un fluide se présentant en phase liquide ou gazeuse permettant l'occurrence de changement de phase. On suppose que dans chaque phase le fluide a ses propres propriétés thermodynamiques. Ainsi, on désigne par ρ_α et ε_α respectivement la densité et l'énergie interne spécifique de la phase α , où $\alpha = 1, 2$ (1 correspondant à la phase vapeur et 2 à la phase liquide), et par $p_\alpha = p_\alpha(\rho_\alpha, \varepsilon_\alpha)$, $T_\alpha = T_\alpha(\rho_\alpha, \varepsilon_\alpha)$ et $s_\alpha = s_\alpha(\rho_\alpha, \varepsilon_\alpha)$ les pression, température et entropie dans la phase α . L'entropie s_α est définie à une constante additive près par les relations de Gibbs :

$$\frac{\partial s_\alpha}{\partial \varepsilon_\alpha} = \frac{1}{T_\alpha}, \quad \frac{\partial s_\alpha}{\partial \rho_\alpha} = -\frac{p_\alpha}{\rho_\alpha^2 T_\alpha}. \quad (6.5)$$

Si on considère maintenant ρ , ε et p respectivement les densité, énergie interne et pression globales du mélange diphasique, on a les relations suivantes :

$$\begin{aligned}\rho &= z\rho_1 + (1-z)\rho_2, \\ \rho\varepsilon &= z\rho_1\varepsilon_1 + (1-z)\rho_2\varepsilon_2, \\ p &= zp_1(\rho_1, \varepsilon_1) + (1-z)p_2(\rho_2, \varepsilon_2).\end{aligned}$$

Ici, la quantité z représente un taux de présence de la phase 1 dans le mélange, qui vaut 1 en phase 1 et 0 en phase 2. On impose encore les relations de fermeture suivantes pour le mélange :

$$\begin{aligned}T_1(\rho_1, \varepsilon_1) &= T_2(\rho_2, \varepsilon_2) = T, \\ p_\alpha &= (\gamma_\alpha - 1)\rho_\alpha\varepsilon_\alpha, \\ T_\alpha &= \frac{\varepsilon_\alpha}{C_{v,\alpha}}.\end{aligned}$$

Elles signifient que, dans chaque phase, le fluide est supposé avoir la même température T et que l'écoulement a lieu selon une loi d'état du type gaz parfait, avec des coefficients adiabatiques $\gamma_1 > 1$, $\gamma_2 > 1$ que l'on va supposer tels que $\gamma_1 > \gamma_2$. Les chaleurs spécifiques $C_{v,1}$ et $C_{v,2}$ sont supposées égales, de sorte que l'on a aussi l'égalité des énergies internes

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon = C_v T,$$

où $C_v = C_{v,1} = C_{v,2}$. Enfin, comme conséquence de (6.5), les entropies s_α sont définies, à une constante près, par

$$s_\alpha = C_v \log \left(\frac{p_\alpha}{\rho_\alpha^{\gamma_\alpha}} \right).$$

Avec ces hypothèses, le modèle global peut être décrit par des formules analytiques (cf. [Car04] et [Jao01]).

6.2.2 La dynamique du changement de phase décrite par le système HEM

L'hypothèse fondamentale à la base du modèle HEM est que, en présence de mélange, c'est-à-dire pour $z \in]0, 1[$, l'écoulement est en équilibre mécanique et thermodynamique. Ceci signifie l'égalité des pressions et des enthalpies libres définies par $g_\alpha = g_\alpha(\rho_\alpha, \varepsilon_\alpha) = \varepsilon_\alpha + \frac{p_\alpha}{\rho_\alpha} - s_\alpha T_\alpha$:

$$\begin{aligned}p_1(\rho_1, \varepsilon_1) &= p_2(\rho_2, \varepsilon_2) \\ g_1(\rho_1, \varepsilon_1) &= g_2(\rho_2, \varepsilon_2).\end{aligned}$$

Ces conditions impliquent que, en présence de mélange, les densités de chaque constituant soient constantes et égales respectivement à des densités d'équilibre ρ_1^* et ρ_2^* , avec $\rho_1^* < \rho_2^*$, si $\gamma_1 > \gamma_2$ (on renvoie à [ACC+c], [Car04] ou [Jao01] pour les expressions de ρ_1^* et de ρ_2^* en fonction de γ_1 et de γ_2). La densité du mélange est ainsi donnée par

$\rho = z\rho_1^* + (1-z)\rho_2^*$, pour z entre 0 et 1. Inversement, z peut être défini comme un taux en fonction de la densité du mélange ρ :

$$z = z(\rho) = \frac{\rho - \rho_2^*}{\rho_1^* - \rho_2^*}.$$

Finalement, comme l'on avait imposé que, en présence de phase pure, l'écoulement suive une loi de pression du type gaz parfait, et qu'en présence des deux phases l'égalité des pressions soit vérifiée, on obtient la loi de pression suivante pour l'écoulement global

$$p = p_E(\rho, \varepsilon) = \begin{cases} (\gamma_1 - 1)\rho\varepsilon, & \rho \leq \rho_1^*, \\ (\gamma_1 - 1)\rho_1^*\varepsilon = (\gamma_2 - 1)\rho_2^*\varepsilon, & \rho_1^* \leq \rho \leq \rho_2^*, \\ (\gamma_2 - 1)\rho\varepsilon, & \rho \geq \rho_2^*. \end{cases} \quad (6.6)$$

Cette équation d'état modélise de façon simple une transition de phase : si $\rho \in]0, \rho_1^*]$ le fluide est sous forme de vapeur et si $\rho \in [\rho_2^*, +\infty[$ le fluide est en phase liquide, ρ_1^* et ρ_2^* correspondant respectivement à des densités de saturation des phases vapeur et liquide. Si $\rho \in]\rho_1^*, \rho_2^*]$, les deux phases sont présentes et le fluide est un mélange diphasique que l'on a supposé homogène.

L'écoulement global est ainsi décrit par le système d'Euler de la dynamique des gaz (6.1), fermé par la loi d'état $p = p_E(\rho, \varepsilon)$. Ce système avec une loi de pression ainsi définie correspond au système HEM.

Bien que la dynamique du changement de phase soit ici modélisée de façon simplifiée, du point de vue de la théorie hyperbolique ce système est plus complexe qu'il ne paraît, car la pression p_E présente un défaut de régularité qui entraîne la non continuité des valeurs propres du système. Dans ce sens, l'approche par relaxation est justifiée : bien que le modèle de relaxation soit un modèle augmenté par rapport à celui que l'on vient de décrire, son étude est plus simple.

6.2.3 Approximation par relaxation - le modèle HRM

L'hypothèse de base du modèle HRM est que l'écoulement du mélange n'a lieu qu'en équilibre mécanique, l'équilibre thermodynamique étant atteint par un processus de relaxation. L'égalité des pressions en phase mixte

$$p_1 = p_2 \iff (\gamma_1 - 1)\rho_1 = (\gamma_2 - 1)\rho_2$$

reste toujours valable, mais ce n'est plus le cas pour l'égalité des enthalpies $g_1 = g_2$, celle-ci étant obtenue par relaxation en temps petit $\frac{1}{\lambda_0}$. Le passage de l'écoulement diphasique de l'état hors équilibre thermodynamique à l'état d'équilibre est décrit par le système

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(\rho_1 z) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_1 z u) = \lambda_0(\rho_1^* z^*(\rho) - \rho_1 z), \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \frac{\partial}{\partial x}((\rho e + p)u) = 0. \end{cases} \quad (6.7)$$

Ce système correspond au système d'Euler avec une équation de relaxation. Le terme de relaxation décrit les transferts de masse entre les deux phases au cours du processus de relaxation et la fonction $z^*(\rho)$ correspond au taux d'équilibre qui est donné, d'après les hypothèses générales que l'on a faites pour le modèle, par

$$z^*(\rho) = \begin{cases} \frac{\rho}{\rho_1^*}, & \rho \leq \rho_1^*, \\ \frac{\rho - \rho_2^*}{\rho_1^* - \rho_2^*}, & \rho_1^* < \rho < \rho_2^*, \\ 0, & \rho > \rho_2^*. \end{cases}$$

La densité $\rho_1 z$ s'approche ici de sa valeur à l'équilibre thermodynamique $\rho_1^* z^*(\rho)$, lorsque l'inverse du temps, λ_0 , tend vers l'infini. La pression p est maintenant définie par la relation $p = zp_1(\rho_1, \varepsilon) + (1 - z)p_2(\rho_2, \varepsilon)$, de sorte que l'on ait

$$p = p_R(\rho_1 z, \rho, \varepsilon) = ((\gamma_1 - 1)\rho_1 z + (\gamma_2 - 1)(\rho - \rho_1 z))\varepsilon.$$

Nous allons adopter une notation plus canonique pour le système (6.7). On pose

$$\alpha = \frac{\rho_1 z}{\rho},$$

de sorte que

$$1 - \alpha = \frac{\rho_2(1 - z)}{\rho}$$

et $\alpha \in [0, 1]$. La quantité α correspond à une fraction de masse. Le système (6.7) peut alors se ré-écrire sous la forme

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(\alpha\rho) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha\rho u) = \lambda_0\rho(\alpha_{eq}(\rho) - \alpha), \\ \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \frac{\partial}{\partial x}((\rho e + p)u) = 0, \end{cases} \quad (6.8)$$

où

$$\alpha_{eq}(\rho) = \frac{\rho_1^* z^*(\rho)}{\rho} \in [0, 1], \quad \forall \rho > 0. \quad (6.9)$$

La loi de pression p prend désormais la forme

$$\begin{aligned} p = p_R(\alpha, \rho, \varepsilon) &= ((\gamma_1 - 1)\alpha\rho + (\gamma_2 - 1)(1 - \alpha)\rho)\varepsilon \\ &= ((\gamma_1\alpha + \gamma_2(1 - \alpha) - 1)\rho)\varepsilon, \\ &= (\gamma(\alpha) - 1)\rho\varepsilon, \end{aligned} \quad (6.10)$$

avec

$$\gamma(\alpha) = \gamma_1\alpha + \gamma_2(1 - \alpha) \in [\gamma_1, \gamma_2], \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

On observe que p s'écrit donc sous la forme d'une loi d'état d'un gaz parfait polytropique, où le coefficient adiabatique γ varie avec α .

Le système (6.8) peut s'écrire sous la forme condensée

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F(U) = S(U),$$

avec

$$\begin{aligned} U &= (\alpha\rho, \rho, \rho u, \rho e), \\ F(U) &= (\alpha\rho u, \rho u, \rho u^2 + p, \rho e + pu), \\ S(U) &= (\lambda_0\rho(\alpha_{eq}(\rho) - \alpha), 0, 0, 0), \end{aligned}$$

où l'état U prend ses valeurs dans l'ensemble

$$\Omega = \{(\alpha\rho, \rho, \rho u, \rho e) \in \mathbb{R}^4 : 0 \leq \alpha\rho \leq \rho, \rho > 0, \varepsilon > 0\}. \quad (6.11)$$

Remarquons que, à l'équilibre $\lambda_0 \rightarrow +\infty$, le système HRM approche le système HEM, au moins à un niveau formel. En effet, lorsque $\lambda_0 \rightarrow +\infty$, on a

$$\alpha \longrightarrow \alpha_{eq}(\rho)$$

et donc

$$p_R(\alpha, \rho, \varepsilon) \longrightarrow p_R(\alpha_{eq}(\rho), \rho, \varepsilon) = p_E(\rho, \varepsilon).$$

Comme l'on a fait pour le système d'Euler, on peut envisager d'écrire le système HRM dans d'autres systèmes de variables, tels que (α, ρ, u, p) , $(\alpha, \rho, u, \varepsilon)$ ou encore (α, ρ, u, s) , où s est l'entropie spécifique, la pression p s'écrivant en fonction de s comme

$$p = p(\alpha, \rho, s) = (\gamma(\alpha) - 1)e^{\frac{s}{c_v}} \rho^{\gamma(\alpha)} = \tilde{A}(\alpha, s)\rho^{\gamma(\alpha)},$$

avec $\tilde{A}(\alpha, s) = (\gamma(\alpha) - 1)e^{\frac{s}{c_v}}$.

Considérons le système HRM *homogène*, c'est-à-dire le système correspondant à la partie convective de (6.8) :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(\alpha\rho) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha\rho u) = 0, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \frac{\partial}{\partial x}((\rho e + p)u) = 0. \end{cases} \quad (6.12)$$

Nous finissons cette section en présentant le résultat suivant concernant l'hyperbolicité et le caractère linéaire des champs caractéristiques de (6.12). Sa preuve est conséquence de calculs classiques en dynamique des gaz et pour cela nous l'omettons.

Proposition 6.1.

Le système (6.12) est un système hyperbolique et sa matrice jacobienne $DF(U)$ admet en chaque point $U \in \Omega$ les quatre valeurs propres

$$\lambda_1(U) = u - c < \lambda_2(U) = \lambda_3(U) = u < \lambda_4(U) = u + c, \quad (6.13)$$

où $c = c(\alpha, \rho, \varepsilon) = c(\alpha, \rho, s) = \sqrt{\frac{\gamma(\alpha)p}{\rho}}$ est la vitesse du son. De plus, les 1er et 4ème champs caractéristiques sont vraiment non linéaires et le champ associé à la valeur propre double $\lambda_2(U) = \lambda_3(U) = u$ est linéairement dégénéré en tout point U .

Le couplage entre le système de la dynamique des gaz et le système HRM

7.1 Présentation du problème du couplage

Nous nous sommes intéressés au couplage à une interface fixe, que nous considérons ici placée en $x = 0$, entre le système d'Euler de la dynamique des gaz et le système HRM. Le problème couplé est décrit par le système

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \frac{\partial}{\partial x}((\rho e + p)u) = 0, \end{array} \right. \quad \left| \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t}(\rho \alpha) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho \alpha u) = \lambda_0 \rho (\alpha_{eq}(\rho) - \alpha), \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho e) + \frac{\partial}{\partial x}((\rho e + p)u) = 0, \end{array} \right. \right.$$

$$x < 0, t > 0, \quad \left| \quad x > 0, t > 0, \quad (7.1)$$

où, pour $x > 0$, $\alpha_{eq}(\rho)$ est donnée par (6.9) et $p = p_R(\alpha, \rho, \varepsilon)$ est donnée par (6.10), et, pour $x < 0$, nous considérons une loi d'état $p = p_L(\rho, \varepsilon)$ dans le cadre présenté à la section 6.1 et vérifiant des propriétés P.1 et P.2 que nous préciserons dans la suite.

Dans la terminologie du chapitre 4, ce problème s'écrit sous la forme (4.9)

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial U_L}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F_L(U_L) = S_L(U_L), \\ x < 0, t > 0, \end{array} \right| \begin{array}{l} \frac{\partial U_R}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F_R(U_R) = S_R(U_R), \\ x > 0, t > 0, \end{array}$$

avec

$$U_L = (\rho, \rho u, \rho e), \quad F_L(U_L) = (\rho u, \rho u^2 + p_L, (\rho e + p_L)u), \quad S_L(U_L) = 0,$$

et

$$U_R = (\alpha, \rho, \rho u, \rho e), \quad F_R(U_R) = (\alpha \rho u, \rho u, \rho u^2 + p_R, (\rho e + p_R)u), \\ S_R(U_R) = (\lambda_0 \rho (\alpha_{eq}(\rho) - \alpha), 0, 0, 0),$$

les ensembles des valeurs admissibles pour U_L et U_R étant respectivement

$$\Omega_L = \{(\rho, \rho u, \rho e) \in \mathbb{R}^3 : \rho > 0, \varepsilon > 0\}$$

et

$$\Omega_R = \{(\alpha\rho, \rho, \rho u, \rho e) \in \mathbb{R}^4 : \alpha \in [0, 1], \rho > 0, \varepsilon > 0\}.$$

On s'intéresse désormais aux conditions de couplage en $x = 0$ pour le problème (7.1). Elles sont définies par une condition de *continuité faible* (au sens du chapitre 4) entre certains systèmes de variables $V_L = \varphi_L(U_L)$ et $V_R = \varphi_R(U_R)$. En pratique, il y a plusieurs choix de variables possibles : d'abord les variables conservatives U_L et U_R (que l'on peut considérer écrites sous la forme ci-dessus avec $\varphi_L = Id_{\mathbb{R}^3}$ et $\varphi_R = Id_{\mathbb{R}^4}$), mais aussi les variables physiques

(i)

$$V_L = (\rho, u, p), \quad V_R = (\alpha, \rho, u, p),$$

pour lesquelles φ_L et φ_R sont définies par $\varphi_L(\rho, \rho u, \rho e) = (\rho, u, p_L(\rho, \varepsilon))$ et $\varphi_R(\alpha, \rho, \rho u, \rho e) = (\alpha, \rho, u, p_R(\alpha, \rho, \varepsilon))$;

(ii)

$$V_L = (\rho, u, h), \quad V_R = (\alpha, \rho, u, h),$$

pour lesquelles φ_L et φ_R sont cette fois définies par $\varphi_L(U_L) = (\rho, u, h_L(\rho, \varepsilon))$ et $\varphi_R(U_R) = (\alpha, \rho, u, h_R(\alpha, \rho, \varepsilon))$, où $h_L(\rho, \varepsilon) = \varepsilon + \frac{p_L(\rho, \varepsilon)}{\rho}$ et $h_R(\alpha, \rho, \varepsilon) = \varepsilon + \frac{p_R(\alpha, \rho, \varepsilon)}{\rho}$ sont les enthalpies spécifiques.

On se place d'abord dans le cas général. On considère des systèmes de variables $V_L = \varphi_L(U_L)$ et $V_R = \varphi_R(U_R)$ prenant leurs valeurs respectivement dans des ensembles $\Omega_{V,L}$ et $\Omega_{V,R}$ (avec $\Omega_{V,L} = \Omega_L$ et $\Omega_{V,R} = \Omega_R$ si $V_L = U_L$ et $V_R = U_R$ sont les variables conservatives). On suit les idées présentées à la section 4.2 du chapitre 4. Concernant les conditions de couplage, nous avons d'abord besoin de définir des opérateurs de projection et de relèvement qui permettent de transformer les variables de chacun des systèmes dans celles de l'autre. On considère alors

$$\Theta_R^L : \Omega_{V,L} \longrightarrow \Omega_{V,R} \quad \text{et} \quad \Theta_L^R : \Omega_{V,R} \longrightarrow \Omega_{V,L}$$

$$V_L \rightarrow \Theta_R^L(V_L) \qquad \qquad V_R \rightarrow \Theta_L^R(V_R)$$

de tels opérateurs. On note $W_L(\frac{x}{t}; U_{L_g}, U_{L_d})$ la solution du problème de Riemann suivant pour le système d'Euler

$$\begin{cases} \frac{\partial U_L}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F_L(U_L) = 0, \\ U_L(x, 0) = \begin{cases} U_{L_g}, & x < 0, \\ U_{L_d}, & x > 0, \end{cases} \end{cases}$$

et $Z_L(\frac{x}{t}; V_{L_g}, V_{L_d})$ la solution de ce problème de Riemann exprimée en variables V_L , c'est-à-dire

$$Z_L\left(\frac{x}{t}; V_{L_g}, V_{L_d}\right) = \varphi_L\left(W_L\left(\frac{x}{t}; \varphi_L^{-1}(V_{L_g}), \varphi_L^{-1}(V_{L_d})\right)\right).$$

De manière analogue, on note $W_R(\frac{x}{t}; U_{R_g}, U_{R_d})$ la solution du problème de Riemann pour le système HRM homogène

$$\begin{cases} \frac{\partial U_R}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} F_R(U_R) = 0, \\ U_R(x, 0) = \begin{cases} U_{R_g}, & x < 0, \\ U_{R_d}, & x > 0, \end{cases} \end{cases}$$

et $Z_R(\frac{x}{t}; V_{R_g}, V_{R_d})$ la solution de ce problème exprimée en variables V_R ,

$$Z_R\left(\frac{x}{t}; V_{R_g}, V_{R_d}\right) = \varphi_R\left(W_R\left(\frac{x}{t}; \varphi_R^{-1}(V_{R_g}), \varphi_R^{-1}(V_{R_d})\right)\right).$$

Les conditions de couplage s'écrivent alors

$$\begin{aligned} V_L(0^-, t) &\in \mathcal{O}_L\left(\Theta_L^R(V_R(0^+, t))\right), \\ V_R(0^+, t) &\in \mathcal{O}_R\left(\Theta_R^L(V_L(0^-, t))\right), \end{aligned} \tag{7.2}$$

pour tout $t > 0$, où, pour $b_L \in \Omega_{V,L}$ et $b_R \in \Omega_{V,R}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_L(b_L) &:= \{Z_L(0^-; V, b_L) : V \in \Omega_{V,L}\}, \\ \mathcal{O}_R(b_R) &:= \{Z_R(0^+; b_R, V) : V \in \Omega_{V,R}\}. \end{aligned}$$

Nous remarquons que les ensembles \mathcal{O}_L et \mathcal{O}_R dépendent des changements de variables φ_L et φ_R . Pour ne pas alourdir le texte, nous avons choisi de ne pas le spécifier.

Pour les variables conservatives U_L et U_R , un choix physique évident pour les opérateurs Θ_R^L et Θ_L^R est celui de l'opérateur de relaxation

$$\begin{aligned} \Pi_R^L : \Omega_L &\longrightarrow \Omega_R \\ U_L = (\rho, \rho u, \rho e) &\longrightarrow (\alpha_{eq}(\rho)\rho, \rho, \rho u, \rho e) \end{aligned}$$

et de l'opérateur de restriction

$$\begin{aligned} \Pi_L^R : \Omega_R &\longrightarrow \Omega_L \\ V_R = (\alpha\rho, \rho, \rho u, \rho e) &\longrightarrow (\rho, \rho u, \rho e). \end{aligned}$$

Pour le système de variables considéré dans (i), on peut choisir

$$\Theta_R^L(\rho, u, p) = (\alpha_{eq}(\rho), \rho, u, p) \quad \text{et} \quad \Theta_L^R(\alpha, \rho, u, p) = (\rho, u, p)$$

et pour celui considéré dans (ii),

$$\Theta_R^L(\rho, u, h) = (\alpha_{eq}(\rho), \rho, u, h) \quad \text{et} \quad \Theta_L^R(\alpha, \rho, u, h) = (\rho, u, h).$$

Nous allons nous intéresser dans la suite à l'étude des conditions de couplage par état dans les variables correspondant au choix (i), c'est-à-dire $V_L = (\rho, u, p)$ et $V_R = (\alpha, \rho, u, p)$. Comme l'on verra, ce système de variables est le plus adéquat pour résoudre

le problème de Riemann en dynamique des gaz. Dans ce cas spécifique, les espaces des états naturels pour V_L et V_R sont respectivement les ensembles

$$\Omega_{V,L} = \{(\rho, u, p) \in \mathbb{R}^3 : \rho > 0, p > 0\}$$

et

$$\Omega_{V,R} = \{(\alpha, \rho, u, p) \in \mathbb{R}^4 : \alpha \in [0, 1], \rho > 0, p > 0\},$$

et les conditions de couplage (7.2) s'écrivent

$$\begin{aligned} (\rho, u, p)(0^-, t) &\in \mathcal{O}_L((\rho, u, p)(0^+, t)), \quad \forall t > 0, \\ (\alpha, \rho, u, p)(0^+, t) &\in \mathcal{O}_R((\alpha_{eq}(\rho), \rho, u, p)(0^-, t)), \quad \forall t > 0. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Ci-dessus, pour un état $V_{L_d} = (\rho_d, u_d, p_d) \in \Omega_{V,L}$ fixé, $\mathcal{O}_L(V_{L_d})$ désigne l'ensemble des traces en $\frac{x}{t} = 0^-$ des solutions, exprimés en variables V_L , de tous les problèmes de Riemann pour le système d'Euler, dont la donnée initiale est égale à V_{L_d} , pour $x > 0$. Pour un état $V_{R_g} = (\alpha_g, \rho_g, u_g, p_g) \in \Omega_{V,R}$ fixé, $\mathcal{O}_R(V_{R_g})$ désigne l'ensemble des traces en $\frac{x}{t} = 0^+$ des solutions, exprimés en variables V_R , de tous les problèmes de Riemann pour le système HRM homogène, dont la donnée initiale est égale à V_{R_g} , pour $x < 0$.

Pour établir les conditions de couplage nous devons alors étudier les ensembles de traces \mathcal{O}_L et \mathcal{O}_R . Ce problème requiert de connaître la structure des solutions du problème de Riemann pour le système d'Euler et pour le système HRM homogène et, en particulier, la vitesse des ondes qui les composent. Il s'impose alors d'étudier les différentes ondes intervenant dans ces deux systèmes, ce que fera l'objet des deux prochaines sections.

7.2 Courbes d'onde et problème de Riemann

On s'intéresse dans cette section aux solutions de type ondes simples, soit des ondes de discontinuité (chocs et discontinuités de contact), soit des détente, pour le système d'Euler et pour le système HRM homogène. L'objectif est de caractériser, pour ces deux systèmes, l'ensemble des états que l'on peut relier à un état admissible donné par une onde d'un de ces types.

7.2.1 Rappel sur les courbes d'onde pour le système d'Euler

Nous nous posons dans le cadre de la section 6.1 : nous considérons une loi d'état générale, vérifiant les principes fondamentaux de la thermodynamique et pour laquelle le problème de Riemann pour le système (6.1) soit bien posé. Notamment nous admettons la stricte convexité de l'entropie $(\tau, \varepsilon) \mapsto s(\tau, \varepsilon)$.

Les résultats présentés dans cette section sont classiques dans le contexte du système de la dynamique des gaz. Pour cela, nous les présentons sans preuve, pour laquelle nous adressons, par exemple, aux ouvrages [GR96] et [Ser96].

Ondes de discontinuité : chocs et discontinuités de contact

Une onde de discontinuité pour le système (6.1) est une solution du type

$$U(x, t) = \begin{cases} U_g, & \frac{x}{t} < \sigma, \\ U_d, & \frac{x}{t} > \sigma, \end{cases} \quad (7.4)$$

où σ , la vitesse de propagation de la discontinuité, doit vérifier les relations de saut de Rankine-Hugoniot

$$[F_L(U)] - \sigma[U] = 0.$$

La notation classique $[U]$ utilisée ci-dessus désigne le saut de U le long de la droite de discontinuité $x = \sigma t$, autrement dit, $[U] = U_d - U_g$. En présence d'une solution de ce genre, on dira fréquemment que U_d est relié à droite à U_g par une discontinuité et réciproquement. Une solution du type (7.4), avec $\sigma = ug = ud$, est une discontinuité de contact (associée au champ caractéristique linéairement dégénéré).

Soit $U_0 = (\rho_0, \rho_0 u_0, \rho_0 e_0) \in \Omega_L$ donné. L'ensemble

$$\mathcal{H}(U_0) = \{U \in \Omega_L \text{ t. q. } \exists \sigma(U_0, U) \in \mathbb{R} : F_L(U) - F_L(U_0) = \sigma(U_0, U)(U - U_0)\}$$

est l'ensemble d'Hugoniot associé à U_0 . À part les états que l'on peut relier à U_0 par des discontinuités de contact, les éléments de $\mathcal{H}(U_0)$ correspondent à des états que l'on peut relier à U_0 par des chocs et forment deux courbes paramétrées dans l'espace des états, associées aux valeurs propres λ_1 et λ_3 . Nous parlons alors de courbes de 1–choc et de 3–choc. La vitesse des chocs, entre autre, caractérise ces courbes : sur la courbe de 1–choc, on doit avoir que *si U est proche de U_0 , alors $\sigma(U_0, U)$ doit être proche de $\lambda_1(U_0) = u_0 - c_0$* et, sur la courbe de 3–choc, $\sigma(U_0, U)$ doit être proche de $\lambda_3(U_0) = u_0 + c_0$.

On verra par la suite qu'il est simple d'exprimer la projection des courbes d'onde dans le plan (u, p) , tant pour le système d'Euler comme pour le système HRM. Pour cette raison, nous allons privilégier les variables (ρ, u, p) (et plus tard, pour le système HRM homogène, (α, ρ, u, p)) pour décrire les courbes d'onde, ainsi que pour résoudre le problème de Riemann. Ainsi, tout le long de cette section on notera U un état exprimé dans le système de variables conservatives $(\rho, \rho u, \rho e)$ et V le même état exprimé dans n'importe quel autre système de variables, tel que (ρ, u, p) ou (τ, u, p) . Dans ce cas, on exigera naturellement que V appartienne à l'ensemble $\Omega_{V,L}$.

Nous nous intéressons alors à l'ensemble des états $U \in \Omega_L$ que l'on peut relier à U_0 par une onde de discontinuité, soit un choc admissible, c'est-à-dire un choc qui vérifie les inégalités d'entropie, soit une discontinuité de contact. Si U et U_0 sont reliés par une onde de discontinuité, alors U appartient à $\mathcal{H}(U_0)$ et les relations de Rankine-Hugoniot s'écrivent

$$\begin{aligned} \sigma(\rho - \rho_0) &= \rho u - \rho_0 u_0, \\ \sigma(\rho u - \rho_0 u_0) &= \rho u^2 + p - \rho_0 u_0^2 - p_0, \\ \sigma(\rho e - \rho_0 e_0) &= (\rho e + p)u - (\rho_0 e_0 + p_0)u_0. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Pour que la discontinuité soit admissible, une condition supplémentaire d'entropie doit être imposée. Comme

$$E_L(\rho, u, \varepsilon) = -\rho s, \quad Q_L(\rho, u, \varepsilon) = -\rho s u$$

est un couple entropie-flux d'entropie pour le système (6.1), on doit avoir

$$\sigma(\rho s - \rho_0 s_0) \leq \rho s u - \rho_0 s_0 u_0. \quad (7.6)$$

Dans le cadre de la dynamique des gaz classique, cette condition, qui traduit l'augmentation de l'entropie à travers le choc, est un critère d'admissibilité équivalent au critère de Lax (cf. [GR96]).

La première relation de saut permet de conclure que

$$\rho(u - \sigma) = \rho_0(u_0 - \sigma) = M = \text{constant}, \quad (7.7)$$

et, grâce à des manipulations algébriques simples, les trois restantes s'écrivent

$$\rho(u - \sigma)^2 + p = \rho_0(u_0 - \sigma)^2 + p_0, \quad (7.8)$$

$$\left\{ \rho \left(\varepsilon + \frac{(u - \sigma)^2}{2} \right) + p \right\} (u - \sigma) = \left\{ \rho_0 \left(\varepsilon_0 + \frac{(u_0 - \sigma)^2}{2} \right) + p_0 \right\} (u_0 - \sigma). \quad (7.9)$$

La constante M représente ici le flux de masse à travers la discontinuité. Deux cas peuvent maintenant se présenter : $M = 0$ ou $M \neq 0$. Si $M = 0$, comme $\rho > 0$ et $\rho_0 > 0$, d'après (7.7) et (7.8) on a obligatoirement $u = \sigma = u_0$ et $p = p_0$, tandis que $\rho > 0$ est arbitraire. Ce cas correspond à une discontinuité de contact. L'ensemble des états que l'on peut relier à U_0 par une discontinuité de contact est ainsi caractérisé par la proposition suivante :

Proposition 7.1.

Soit $V_0 = (\rho_0, u_0, p_0) \in \Omega_{V,L}$. L'ensemble des états $V \in \Omega_{V,L}$ que l'on peut relier à V_0 par une discontinuité de contact est l'ensemble

$$\mathcal{D}^{2,L}(V_0) = \{(\rho, u, p) : u = u_0, p = p_0, \rho > 0\}.$$

Pour tout V appartenant à l'ensemble précédent, $\sigma(V_0, V) = u = u_0$ est la vitesse à laquelle se propage la discontinuité entre V et V_0 .

On considère désormais le cas où $M \neq 0$. La discontinuité est alors un choc et les relations (7.7)-(7.9) permettent de conclure :

Lemme 7.1.

Si $M \neq 0$, les relations de saut de Rankine-Hugoniot peuvent s'écrire sous la forme équivalente

$$\begin{cases} M = \frac{u - u_0}{\tau - \tau_0}, \\ M^2 = -\frac{p - p_0}{\tau - \tau_0} \end{cases} \quad (7.10)$$

et

$$\varepsilon - \varepsilon_0 + \frac{1}{2}(p + p_0)(\tau - \tau_0) = 0. \quad (7.11)$$

De plus, la vitesse de la discontinuité vérifie

$$\sigma = u - M\tau = u_0 - M\tau_0.$$

L'équation (7.11) est appelée d'équation d'Hugoniot de centre (τ_0, p_0) . À ce point, nous supposons que la propriété suivante est vérifiée :

P. 1. La fonction $(\tau, p) \mapsto \varepsilon(\tau, p)$ est telle que l'équation d'Hugoniot de centre (τ_0, p_0) (7.11) est inversible en τ et permet donc de définir τ comme une fonction de p , $\tau = h_0(p)$, qui vérifie $h_0(p_0) = \tau_0$ et que l'on suppose strictement convexe et décroissante, avec $\lim_{p \rightarrow 0} h_0(p) = \tau_{0max}$, $\lim_{p \rightarrow +\infty} h_0(p) = \tau_{0min}$, où $\tau_{0max} > \tau_0$ et $\tau_{0min} < \tau_0$ sont des constantes réelles.

Remarque 7.1.

Dans le cas d'un gaz parfait polytropique de loi d'état (6.3), l'équation (7.11) s'écrit

$$\frac{p\tau}{\gamma-1} - \frac{p_0\tau_0}{\gamma-1} + \frac{1}{2}(p+p_0)(\tau-\tau_0) = 0$$

et on a donc

$$\tau = h_0(p) = \tau_0 \frac{\mu^2 p + p_0}{p + p_0 \mu^2},$$

où

$$\mu^2 = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \in]0, 1[$$

(l'exposant précise ici le fait que cette quantité est strictement positive). On a $\tau_{0max} = \frac{\tau_0}{\mu^2}$ et $\tau_{0min} = \tau_0 \mu^2$.

Le lemme précédent décrit ainsi l'ensemble des états que l'on peut relier à U_0 par un choc et l'équation (7.11), en particulier, la projection de cet ensemble dans le plan (τ, p) . L'étude de la courbe d'Hugoniot et de la condition d'entropie (7.6) permettent de donner la caractérisation suivante des courbes de 1-choc et de 3-choc :

Proposition 7.2 (Chocs admissibles pour le système d'Euler).

Soit $V_0 = (\rho_0, u_0, p_0) \in \Omega_{V,L}$. On suppose que P.1 est vérifiée. Alors, l'ensemble des états $V = (\rho, u, p) \in \Omega_{V,L}$ que l'on peut relier à V_0 , à droite (respectivement à gauche), par un 1-choc admissible, est donné par

$$\rho = \frac{1}{h_0(p)}, \quad u = u_0 - \sqrt{(p-p_0)(\tau_0 - h_0(p))}, \quad p \geq p_0,$$

(respectivement par

$$\rho = \frac{1}{h_0(p)}, \quad u = u_0 + \sqrt{(p-p_0)(\tau_0 - h_0(p))}, \quad p \leq p_0),$$

et l'ensemble des états $V = (\rho, u, p) \in \Omega_{V,L}$ que l'on peut relier à V_0 , à droite (respectivement à gauche), par un 3-choc admissible, est donné par

$$\rho = \frac{1}{h_0(p)}, \quad u = u_0 - \sqrt{(p-p_0)(\tau_0 - h_0(p))}, \quad p \leq p_0,$$

(respectivement par

$$\rho = \frac{1}{h_0(p)}, \quad u = u_0 + \sqrt{(p - p_0)(\tau_0 - h_0(p))}, \quad p \geq p_0).$$

La vitesse du choc est donnée par $\sigma = u - M\tau = u_0 - M\tau_0$, où $M = \frac{u - u_0}{\tau - \tau_0}$. On a $M > 0$ pour un 1-choc et $M < 0$ pour un 3-choc.

Détentes

Nous nous intéressons désormais aux solutions de type détente du système d'Euler. Nous rappelons qu'une k -onde de détente (ou de raréfaction), où $k = 1, 3$, est une solution continue auto-semblable (c'est-à-dire, vérifiant « $U(x, t) = U(\frac{x}{t})$ ») du type

$$U(x, t) = \begin{cases} U_g & \frac{x}{t} \leq \lambda_k(U_g), \\ V(\frac{x}{t}) & \lambda_k(U_g) \leq \frac{x}{t} \leq \lambda_k(U_d), \\ U_d & \frac{x}{t} \geq \lambda_k(U_d), \end{cases}$$

où $V(\cdot)$ est une fonction de classe \mathcal{C}^1 . Il n'existe pas d'ondes de détente associées à un champ linéairement dégénéré (cf. [GR96] pour le cas général). On dira que U_g est relié à gauche à U_d par une détente et réciproquement.

Soit $U_0 = (\rho_0, \rho_0 u_0, \rho_0 e_0) \in \Omega_L$ donné. Nous voulons caractériser l'ensemble des états $U \in \Omega_L$ que l'on peut relier à U_0 par une détente. Pour ce faire, il convient d'exprimer le système d'Euler en variables Lagrangiennes :

$$\begin{cases} \frac{\partial \tau}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial s}{\partial t} = 0, \end{cases} \quad (7.12)$$

avec $p = p(\tau, s)$.

Ainsi si $(x, t) \mapsto (\tau, u, s)(\frac{x}{t})$ est une solution régulière du système (7.12) reliant deux états V et $V_0 = (\tau_0, u_0, s_0)$, on a

$$\begin{cases} \xi \tau'(\xi) - u'(\xi) = 0, \\ \xi u'(\xi) + p'(\xi) = 0, \\ s'(\xi) = 0, \end{cases}$$

où $\xi = \frac{x}{t}$. Puisque $s'(\xi) = 0$, on a

$$p'(\xi) = \frac{\partial p}{\partial \tau} \tau'(\xi) = -\frac{c^2}{\tau^2} \tau'(\xi)$$

et des deux premières équations du système ci-dessus on obtient alors

$$\left(\xi^2 - \frac{c^2}{\tau^2}\right) \tau'(\xi) = 0.$$

Si $\tau'(\xi) = 0$, on trouve la solution triviale $(\tau, u, s)\left(\frac{x}{t}\right) \equiv V_0$; sinon, on a $\xi = \pm \frac{c}{\tau} = \pm \rho c$ et donc le long de la détente on a $s = s_0$, $\tau = \tau(p, s_0)$, $c = c(p, s_0)$ et

$$u'(\xi) = \pm \frac{1}{(\rho c)} p'(\xi) \implies u = u_0 \pm \int_{p_0}^p \frac{1}{(\rho c)(q, s_0)} dq.$$

Le signe $-$ correspond à une 1-détente et le signe $+$ à une 3-détente.

Remarque 7.2.

Les valeurs propres de la matrice jacobienne de (7.12) sont donnés par

$$-\sqrt{\frac{\partial p}{\partial \tau}(\tau, s)}, \quad 0, \quad \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \tau}(\tau, s)},$$

c'est-à-dire, $-\rho c(\tau, s)$, 0 , $\rho c(\tau, s)$, puisque $-\frac{\partial p}{\partial \tau}(\tau, s) = \frac{c^2}{\tau^2}$.

On retrouve le fait que les paires $(s, u - l)$ et $(s, u + l)$, où $l = l(p, s)$ vérifie

$$\frac{\partial l}{\partial p} = \frac{1}{(\rho c)(p, s)},$$

sont respectivement une paire de 1-invariants de Riemann et une paire de 3-invariants de Riemann pour le système de la dynamique des gaz. Le long d'une k -détente, les k -invariants de Riemann sont constants.

On peut alors énoncer le résultat suivant qui caractérise les états que l'on peut relier à un état donné par une onde de raréfaction.

Proposition 7.3 (Détentes pour le système d'Euler).

Soit $V_0 = (\rho_0, u_0, p_0) \in \Omega_{V,L}$. L'ensemble des états $V = (\rho, u, p) \in \Omega_{V,L}$ que l'on peut relier à V_0 , à droite (respectivement à gauche), par une 1-détente, est donné par

$$\rho = \rho(p, s_0), \quad u = u_0 - \int_{p_0}^p \frac{1}{(\rho c)(q, s_0)} dq, \quad p \leq p_0$$

(respectivement par

$$\rho = \rho(p, s_0), \quad u = u_0 - \int_{p_0}^p \frac{1}{(\rho c)(q, s_0)} dq, \quad p \geq p_0),$$

et l'ensemble des états $V = (\rho, u, p) \in \Omega_{V,L}$ que l'on peut relier à V_0 , à droite (respectivement à gauche), par une 3-détente, est donné par

$$\rho = \rho(p, s_0), \quad u = u_0 + \int_{p_0}^p \frac{1}{(\rho c)(q, s_0)} dq, \quad p \geq p_0$$

(respectivement par

$$\rho = \rho(p, s_0), \quad u = u_0 + \int_{p_0}^p \frac{1}{(\rho c)(q, s_0)} dq, \quad p \leq p_0).$$

Si V et V_0 sont reliés par une détente, le bord de la détente attaché à l'état V_0 se déplace à la vitesse $u_0 \pm c_0$ et le bord attaché à l'état V à la vitesse $u \pm c$, où le signe $-$ est valable pour une 1-détente et le signe $+$ pour une 3-détente.

Comme pour les courbes de choc, on constate que l'ensemble des états que l'on peut joindre à un état donné par une k -détente forme une courbe dans l'espace des états, que l'on peut paramétrer par p . On parle alors de courbes de 1-détente et de 3-détente.

Dorénavant, pour $V_0 = (\rho_0, u_0, p_0) \in \Omega_{V,L}$ donné, nous noterons $\mathcal{C}_D^{k,L}(V_0)$ (respectivement $\mathcal{C}_G^{k,L}(V_0)$) la courbe des états $V = (\rho, u, p) \in \Omega_{V,L}$ qui peuvent être reliés à droite (respectivement à gauche) à V_0 par une k -onde admissible pour le système d'Euler, où $k = 1$ ou $k = 3$. Ces courbes sont décrites par les propositions 7.2 et 7.3. Si l'on considère les fonctions

$$\Phi_{L,0}(p) = \Phi_L(V_0; p) = \begin{cases} \int_{p_0}^p \frac{1}{(\rho c)(q, s_0)} dq, & p \leq p_0, \\ \sqrt{(p - p_0)(\tau_0 - h_0(p))}, & p \geq p_0, \end{cases}$$

$$\Psi_{L,0}(p) = \Psi_L(V_0; p) = \begin{cases} \sqrt{(p - p_0)(\tau_0 - h_0(p))}, & p \leq p_0, \\ - \int_{p_0}^p \frac{1}{(\rho c)(q, s_0)} dq, & p \geq p_0, \end{cases}$$

et

$$\varphi_{L,0}(p) = \varphi(V_0; p) = \begin{cases} \rho(p, s_0), & p \leq p_0, \\ \frac{1}{h_0(p)}, & p \geq p_0, \end{cases}$$

$$\psi_{L,0}(p) = \psi(V_0; p) = \begin{cases} \frac{1}{h_0(p)}, & p \leq p_0, \\ \rho(p, s_0), & p \geq p_0, \end{cases}$$

on peut résumer les résultats de ces propositions de la façon suivante : la courbe de 1-onde $\mathcal{C}_D^{1,L}(U_0)$ (respectivement la courbe $\mathcal{C}_G^{1,L}(U_0)$) est décrite par les états $V = (\rho, u, p)$ tels que

$$u = u_0 - \Phi_{L,0}(p), \quad \rho = \varphi_{L,0}(p), \quad p > 0$$

(respectivement tels que

$$u = u_0 + \Psi_{L,0}(p), \quad \rho = \psi_{L,0}(p), \quad p > 0)$$

et la courbe de 3-onde $\mathcal{C}_D^{3,L}(U_0)$ (respectivement la courbe $\mathcal{C}_G^{3,L}(U_0)$) est décrite par les états $V = (\rho, u, p)$ tels que

$$u = u_0 - \Psi_{L,0}(p), \quad \rho = \psi_{L,0}(p), \quad p > 0,$$

(respectivement tels que

$$u = u_0 + \Phi_{L,0}(p), \quad \rho = \varphi_{L,0}(p), \quad p > 0).$$

7.2.2 Courbes d'onde pour le système HRM homogène

On passe à l'étude des courbes d'onde pour le système HRM homogène. Comme l'on a déjà remarqué, ce système peut être vu comme le système de la dynamique des gaz muni d'une équation supplémentaire et avec une loi de pression du type gaz parfait polytropique où le coefficient adiabatique γ varie avec α . Sa structure hyperbolique est analogue à celle du système d'Euler, puisque ses valeurs propres et ceux de ce dernier sont identiques, le champ supplémentaire dans le système HRM correspondant à un champ associé à la valeur propre double $\lambda(u) = u$. On verra dans la suite que la structure de ses ondes est elle aussi analogue à celle des ondes intervenant en dynamique des gaz.

Ondes de discontinuité pour le système HRM homogène

Nous nous intéressons en premier aux ondes de discontinuité pour le système HRM homogène. Soit $U_0 = (\alpha_0 \rho_0, \rho_0, \rho_0 u_0, \rho_0 e_0) \in \Omega_R$ donné. Si $U \in \Omega_R$ et U_0 sont reliés par une onde de discontinuité, U et U_0 vérifient les relations de Rankine-Hugoniot, qui prennent ici la forme

$$[F_R(U)] - \sigma[U] = 0,$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \sigma(\rho\alpha - \rho_0\alpha_0) &= \rho\alpha u - \rho_0\alpha_0 u_0, \\ \sigma(\rho - \rho_0) &= \rho u - \rho_0 u_0, \\ \sigma(\rho u - \rho_0 u_0) &= \rho u^2 + p - \rho_0 u_0^2 - p_0, \\ \sigma(\rho e - \rho_0 e_0) &= (\rho e + p)u - (\rho_0 e_0 + p_0)u_0. \end{aligned}$$

On a alors à nouveau, d'après la deuxième relation de saut, $\rho(u - \sigma) = \rho_0(u_0 - \sigma) = M$, de sorte que la première relation de saut s'écrit

$$M(\alpha - \alpha_0) = 0. \quad (7.13)$$

Comme au paragraphe précédent, on a à distinguer les cas $M = 0$ et $M \neq 0$. Si $M = 0$, on a à nouveau $u = \sigma = u_0$, $p = p_0$ et α est arbitraire en $[0, 1]$, comme ρ en $]0, +\infty[$. On est en présence d'une discontinuité de contact (associée au champ caractéristique double linéairement dégénéré).

Proposition 7.4.

Soit $V_0 = (\alpha_0, \rho_0, u_0, p_0) \in \Omega_{V,R}$. L'ensemble des états $V \in \Omega_{V,R}$ que l'on peut relier à V_0 par une discontinuité de contact est l'ensemble

$$\mathcal{D}^{(2,3),R}(U_0) = \{(\alpha, \rho, u, p) : u = u_0, p = p_0, \rho > 0, \alpha \in [0, 1]\}.$$

Pour tout V appartenant à l'ensemble précédent, $\sigma(V_0, V) = u = u_0$ est la vitesse à laquelle se propage la discontinuité entre V et V_0 .

Si $M \neq 0$, on a $\alpha = \alpha_0$, d'après (7.13), et la discontinuité est un choc. En remplaçant α par α_0 dans l'expression de p , on obtient, des trois dernières équations de saut, le système classique de relations de Rankine-Hugoniot pour le système d'Euler, qui peut

s'écrire de façon analogue sous la forme (7.7)-(7.9). On peut alors conclure un résultat analogue à celui du lemme (7.1), notamment déduire l'équation d'Hugoniot

$$\varepsilon - \varepsilon_0 + \frac{1}{2}(p + p_0)(\tau - \tau_0) = 0. \quad (7.14)$$

Maintenant, comme $\alpha = \alpha_0$ et la loi d'état (6.10) peut être inversée par rapport à ε ,

$$\varepsilon = \varepsilon(\tau, p, \alpha) = \frac{p\tau}{\gamma(\alpha) - 1},$$

l'équation d'Hugoniot permet de définir τ en fonction de p et inversement :

$$\tau = \mathfrak{h}_0(p) = \mathfrak{h}_0(\alpha_0; p) = \tau_0 \frac{\mu_0^2 p + p_0}{p + p_0 \mu_0^2} \quad \text{et} \quad p = p^0(\tau) = p^0(\alpha_0; \tau) = p_0 \frac{\tau_0 - \mu_0^2 \tau}{\tau - \mu_0^2 \tau_0},$$

où

$$\mu_0^2 = \frac{\gamma(\alpha_0) - 1}{\gamma(\alpha_0) + 1} \in]0, 1[.$$

On va privilégier τ comme fonction de p et on remarque que la fonction \mathfrak{h}_0 vérifie des propriétés analogues à celles que l'on a supposé dans P.1 :

Lemme 7.2.

La fonction \mathfrak{h}_0 est une fonction convexe strictement décroissante, avec

$$\lim_{p \rightarrow 0} \mathfrak{h}_0(\alpha_0; p) = \frac{\tau_0}{\mu_0^2} > \tau_0, \quad \lim_{p \rightarrow +\infty} \mathfrak{h}_0(\alpha_0; p) = \tau_0 \mu_0^2 < \tau_0.$$

Démonstration.

Puisque $\mu_0^2 < 1$, on a

$$\mathfrak{h}_0'(\alpha_0; p) = \tau_0 p_0 \frac{(\mu_0^2 - 1)(\mu_0^2 + 1)}{(p + p_0 \mu_0^2)^2} < 0$$

et

$$\mathfrak{h}_0''(\alpha_0; p) = -2\tau_0 p_0 \frac{(\mu_0^2 - 1)(\mu_0^2 + 1)}{(p + p_0 \mu_0^2)^3} > 0,$$

ce qui prouve que \mathfrak{h}_0 est une fonction convexe strictement décroissante. D'un autre côté, il est immédiat que $\lim_{p \rightarrow 0} \mathfrak{h}_0(\alpha_0; p) = \frac{\tau_0}{\mu_0^2}$ et que $\lim_{p \rightarrow +\infty} \mathfrak{h}_0(\alpha_0; p) = \tau_0 \mu_0^2$. \square

Maintenant, on vérifie aisément que

$$E_R(\alpha, \rho, u, p) = -\rho s(\alpha, \rho, p), \quad Q_R(\alpha, \rho, u, p) = -\rho s(\alpha, \rho, u, p)u$$

définit un couple entropie-flux d'entropie pour le système HRM homogène. L'analyse de la condition d'entropie le long d'un choc est donc la même que pour le système d'Euler et les chocs admissibles pour le système HRM homogène doivent vérifier en plus aussi la condition (7.6).

En résumé, pour le système HRM homogène, à travers un choc α est constant et l'analyse des courbes de choc est la même que pour le système d'Euler correspondant à la loi d'état (6.3) avec $\gamma = \gamma(\alpha_0)$. Nous pouvons ainsi énoncer la proposition suivante, qui est l'analogue de la proposition 7.2.

Proposition 7.5 (Chocs admissibles pour le système HRM homogène).

Soit $V_0 = (\alpha_0, \rho_0, u_0, p_0) \in \Omega_{V,R}$. L'ensemble des états $V = (\alpha, \rho, u, p) \in \Omega_{V,R}$ que l'on peut relier à V_0 , à droite (respectivement à gauche), par un 1-choc admissible, est donné par

$$\alpha = \alpha_0, \quad \rho = \frac{1}{\mathfrak{h}_0(\alpha_0; p)}, \quad u = u_0 - \sqrt{(p - p_0)(\tau_0 - \mathfrak{h}_0(\alpha_0; p))}, \quad p \geq p_0,$$

(respectivement par

$$\alpha = \alpha_0, \quad \rho = \frac{1}{\mathfrak{h}_0(\alpha_0; p)}, \quad u = u_0 + \sqrt{(p - p_0)(\tau_0 - \mathfrak{h}_0(\alpha_0; p))}, \quad p \leq p_0),$$

et l'ensemble des états $V = (\alpha, \rho, u, p) \in \Omega_{V,R}$ que l'on peut relier à V_0 , à droite (respectivement à gauche), par un 4-choc admissible, est donné par

$$\alpha = \alpha_0, \quad \rho = \frac{1}{\mathfrak{h}_0(\alpha_0; p)}, \quad u = u_0 - \sqrt{(p - p_0)(\tau_0 - \mathfrak{h}_0(\alpha_0; p))}, \quad p \leq p_0,$$

(respectivement par

$$\alpha = \alpha_0, \quad \rho = \frac{1}{\mathfrak{h}_0(\alpha_0; p)}, \quad u = u_0 + \sqrt{(p - p_0)(\tau_0 - \mathfrak{h}_0(\alpha_0; p))}, \quad p \geq p_0).$$

Si V_0 et $V \in \Omega_{V,R}$ sont reliés par un choc, alors sa vitesse est donnée par $\sigma = u - M\tau = u_0 - M\tau_0$, où $M = \frac{u - u_0}{\tau - \tau_0}$. On a $M > 0$ pour un 1-choc et $M < 0$ pour un 4-choc.

Détentes

On caractérise maintenant les états que l'on peut relier à un état V_0 donné par une détente. Supposons $(x, t) \mapsto (\alpha, \rho, u, p)\left(\frac{x}{t}\right)$ une fonction régulière vérifiant les équations (6.12) au sens fort et reliant un état V à V_0 . Dans ce cas, puisque α vérifie l'équation

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + u \frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0,$$

on a, en posant $\xi = \frac{x}{t}$,

$$-\alpha'(\xi)\xi + u(\xi)\alpha'(\xi) = 0,$$

soit

$$\alpha'(\xi)(-\xi + u(\xi)) = 0.$$

On en déduit que $\alpha'(\xi) = 0$ ou $u(\xi) = \xi$. Or cette dernière équation n'est pas possible car, si on avait $u(\xi) = \xi$, de la deuxième équation de (6.12), on obtiendrait

$$-\rho'(\xi)\frac{x}{t^2} + (\xi\rho'(\xi) + \rho(\xi))\frac{1}{t} = 0,$$

c'est-à-dire

$$-\xi\rho'(\xi) + \xi\rho'(\xi) + \rho(\xi) = \rho(\xi) = 0,$$

ce qui ne peut pas avoir lieu. On conclut alors que $\alpha'(\xi) = 0$ et le long de la détente α est constant et égal à α_0 . Ainsi, la caractérisation des détente pour le système HRM

homogène est à nouveau la même que pour le système d'Euler correspondant à la loi d'état (6.3) avec $\gamma = \gamma(\alpha_0)$. On retrouve à nouveau que, le long d'une k -détente, les k -invariants de Riemann w_k sont constants. Ceux-ci s'expriment de manière analogue que pour le système d'Euler : si l'on considère la pression p exprimée en fonction des variables (α, ρ, s) , ρ et c pouvant être donnés comme fonction de (α, p, s) par

$$\rho(\alpha, p, s) = \left(\frac{p}{\tilde{A}(\alpha; s)} \right)^{\frac{1}{\gamma(\alpha)}}, \quad c(\alpha, p, s) = \sqrt{\frac{\gamma(\alpha)p}{\rho(\alpha, p, s)}},$$

on a ainsi que les triplets $(\alpha, s, u - l)$ et $(\alpha, s, u + l)$, où $l = l(\alpha, p, s)$ vérifie

$$\frac{\partial l}{\partial p} = \frac{1}{(\rho c)(\alpha, p, s)},$$

sont des 1-invariants de Riemann et des 4-invariants de Riemann pour le système HRM homogène. On peut alors énoncer le résultat suivant, qui est l'analogue de la proposition (7.3).

Proposition 7.6 (Détentes pour le système HRM homogène).

Soit $V_0 = (\alpha_0, \rho_0, u_0, p_0) \in \Omega_{V,R}$. L'ensemble des états $V = (\alpha, \rho, u, p) \in \Omega_{V,R}$ que l'on peut relier à V_0 , à droite (respectivement à gauche), par une 1-détente, est donné par

$$\alpha = \alpha_0, \quad \rho = \rho(\alpha_0, p, s_0), \quad u = u_0 - \int_{p_0}^p \frac{1}{(\rho c)(\alpha_0, q, s_0)} dq, \quad p \leq p_0$$

(respectivement par

$$\alpha = \alpha_0, \quad \rho = \rho(\alpha_0, p, s_0), \quad u = u_0 - \int_{p_0}^p \frac{1}{(\rho c)(\alpha_0, q, s_0)} dq, \quad p \geq p_0),$$

et l'ensemble des états $V \in \Omega_{V,R}$ que l'on peut relier à V_0 , à droite (respectivement à gauche), par une 4-détente, est donné par

$$\alpha = \alpha_0, \quad \rho = \rho(\alpha_0, p, s_0), \quad u = u_0 + \int_{p_0}^p \frac{1}{(\rho c)(\alpha_0, q, s_0)} dq, \quad p \geq p_0$$

(respectivement par

$$\alpha = \alpha_0, \quad \rho = \rho(\alpha_0, p, s_0), \quad u = u_0 + \int_{p_0}^p \frac{1}{(\rho c)(\alpha_0, q, s_0)} dq, \quad p \leq p_0).$$

Si $V \in \Omega_{V,R}$ et V_0 sont reliés par une détente, le bord de la détente attaché à l'état V_0 se déplace à la vitesse $u_0 \pm c_0$ et le bord attaché à l'état V à la vitesse $u \pm c$, où le signe $-$ est valable pour une 1-détente et le signe $+$ pour une 4-détente.

On désigne maintenant par $\mathcal{C}_D^{k,R}(V_0)$ (respectivement par $\mathcal{C}_G^{k,R}(V_0)$), l'ensemble des états $V \in \Omega_{V,R}$ que l'on peut joindre à V_0 à droite (respectivement à gauche) par une k -onde admissible, où cette fois-ci on a $k = 1$ ou $k = 4$. On considère aussi les fonctions

$$\Phi_{R,0}(p) = \Phi_R(V_0; p) = \begin{cases} \int_{p_0}^p \frac{1}{(\rho c)(\alpha_0, q, s_0)} dq, & p \leq p_0, \\ \sqrt{(p - p_0)(\tau_0 - \mathfrak{h}_0(\alpha_0; p))}, & p \geq p_0, \end{cases}$$

$$\Psi_{R,0}(p) = \Psi_R(V_0; p) = \begin{cases} \sqrt{(p-p_0)(\tau_0 - \mathfrak{h}_0(\alpha_0; p))}, & p \leq p_0, \\ -\int_{p_0}^p \frac{1}{(\rho c)(\alpha_0, q, s_0)} dq, & p \geq p_0, \end{cases}$$

et

$$\varphi_{R,0}(p) = \varphi_R(V_0; p) = \begin{cases} \rho(\alpha_0, p, s_0), & p \leq p_0, \\ \frac{1}{h_0(\alpha_0; p)}, & p \geq p_0, \end{cases}$$

$$\psi_{R,0}(p) = \psi_R(V_0; p) = \begin{cases} \frac{1}{h_0(\alpha_0; p)}, & p \leq p_0, \\ \rho(\alpha_0, p, s_0), & p \geq p_0. \end{cases}$$

On a alors, comme au paragraphe précédent, que l'on peut re-écrire les résultats des propositions 7.5 et 7.6 de la façon suivante : la courbe de 1-onde $\mathcal{C}_D^{1,R}(V_0)$ (respectivement la courbe de 1-onde $\mathcal{C}_G^{1,R}(V_0)$) est décrite par les états $V = (\alpha, \rho, u, p) \in \Omega_{V,R}$ tels que

$$\alpha = \alpha_0, \quad u = u_0 - \Phi_{R,0}(p), \quad \rho = \varphi_{R,0}(p), \quad p > 0$$

(respectivement

$$\alpha = \alpha_0, \quad u = u_0 + \Psi_{R,0}(p), \quad \rho = \psi_{R,0}(p), \quad p > 0)$$

et la courbe de 4-onde $\mathcal{C}_D^{4,R}(U_0)$ (respectivement la courbe de 4-onde $\mathcal{C}_G^{4,R}(U_0)$) est décrite par les états $V = (\alpha, \rho, u, p) \in \Omega_{V,R}$ tels que

$$\alpha = \alpha_0, \quad u = u_0 - \Psi_{R,0}(p), \quad \rho = \psi_{R,0}(p), \quad p > 0$$

(respectivement

$$\alpha = \alpha_0, \quad u = u_0 + \Phi_{R,0}(p), \quad \rho = \varphi_{R,0}(p), \quad p > 0).$$

Pour simplifier la notation, on pose $\gamma_0 := \gamma(\alpha_0)$. On peut trouver maintenant des expressions explicites pour les fonctions $\Phi_{R,0}$, $\Psi_{R,0}$, $\varphi_{R,0}$ et $\psi_{R,0}$. En effet, on a, d'une part,

$$\rho(\alpha_0, p, s_0) = \left(\frac{p}{(\gamma_0 - 1)\tilde{A}(\alpha_0, s_0)} \right)^{\frac{1}{\gamma_0}} = \rho_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{\gamma_0}},$$

de sorte que

$$c(\alpha_0, p, s_0) = \sqrt{\frac{\gamma_0 p}{\rho(\alpha_0, p, s_0)}} = \sqrt{\frac{\gamma_0 p_0}{\rho_0} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2\gamma_0}}} = c_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma_0 - 1}{2\gamma_0}}. \quad (7.15)$$

On en déduit

$$\frac{1}{\rho c}(\alpha_0, p, s_0) = \frac{1}{\rho_0 c_0} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{-\frac{\gamma_0 + 1}{2\gamma_0}}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\int_{p_0}^p \frac{1}{(\rho c)(\alpha_0, q, s_0)} dq &= \frac{p_0}{\rho_0 c_0} \frac{1}{-\frac{\gamma_0+1}{2\gamma_0} + 1} \left(\left(\frac{p}{p_0} \right)^{-\frac{\gamma_0+1}{2\gamma_0} + 1} - 1 \right) \\
&= \frac{c_0}{\gamma_0} \frac{2\gamma_0}{\gamma_0 - 1} \left(\left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma_0-1}{2\gamma_0}} - 1 \right) \\
&= \frac{2}{\gamma_0 - 1} c_0 \left(\left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\gamma_0-1}{2\gamma_0}} - 1 \right) \\
&= \frac{2}{\gamma_0 - 1} (c(\alpha_0, p, s_0) - c_0). \tag{7.16}
\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\tau_0 - \mathfrak{h}_0(\alpha_0; p) = \frac{\tau_0(p + \mu_0^2 p_0) - \tau_0(\mu_0^2 p + p_0)}{p + \mu_0^2 p_0} = \tau_0 \frac{(p - p_0)(1 - \mu_0^2)}{p + \mu_0^2 p_0}, \tag{7.17}$$

de sorte que

$$\sqrt{(p - p_0)(\tau_0 - \mathfrak{h}_0(\alpha_0; p))} = |p - p_0| \sqrt{\tau_0} \sqrt{\frac{1 - \mu_0^2}{p + \mu_0^2 p_0}}.$$

7.2.3 Projection des courbes d'onde dans le plan (u, p)

Afin de décrire géométriquement les courbes d'onde pour les systèmes d'Euler et HRM homogène, nous allons montrer certaines propriétés concernant la différentiabilité des fonctions $\Phi_{L,0}$, $\Psi_{L,0}$, $\Phi_{R,0}$ et $\Psi_{R,0}$ introduites auparavant.

Concernant le système d'Euler, nous supposons dorénavant que la propriété suivante est vérifiée :

P.2. La fonction $(p, s) \mapsto c(p, s)$ est tel que

$$\lim_{p \rightarrow 0} c(p, s) = 0, \quad \lim_{p \rightarrow +\infty} c(p, s) = +\infty.$$

On commence par montrer le lemme suivant :

Lemme 7.3.

On suppose que les propriétés P.1 et P.2 sont vérifiées. Alors la fonction $\Phi_{L,0}$ est une fonction strictement croissante, avec

$$\lim_{p \rightarrow 0} \Phi_{L,0}(p) = \Phi_{L,0}(0) = - \int_0^{p_0} \frac{1}{(\rho c)(q, s_0)} dq, \quad \lim_{p \rightarrow +\infty} \Phi_{L,0}(p) = +\infty,$$

et la fonction $\Psi_{L,0}$ est strictement décroissante, avec

$$\lim_{p \rightarrow 0} \Psi_{L,0}(p) = \Psi_{L,0}(0) = \sqrt{p_0(\tau_{0max} - \tau_0)}, \quad \lim_{p \rightarrow +\infty} \Psi_{L,0}(p) = -\infty.$$

De plus, $\Phi_{L,0}$ et $\Psi_{L,0}$ sont de classe C^1 , avec en particulier

$$\Phi'_{L,0}(p_0) = \frac{\tau_0}{c_0} \quad \text{et} \quad \Psi'_{L,0}(p_0) = -\frac{\tau_0}{c_0}.$$

Démonstration.

On pose $h_{ch}(p) = \sqrt{(p - p_0)(\tau_0 - h_0(p))}$ et $h_{det}(p) = \int_{p_0}^p \frac{1}{(\rho c)(q, s_0)} dq$. On a, d'une part,

$$h'_{det}(p) = \frac{1}{(\rho c)(p, s_0)} > 0, \quad \forall p > 0,$$

et, d'autre part,

$$h'_{ch}(p) = \frac{(\tau_0 - h_0(p)) - (p - p_0)h'_0(p)}{2\sqrt{(p - p_0)(\tau_0 - h_0(p))}}$$

et donc, puisque on a supposé P.1,

$$\begin{cases} h'_{ch}(p) > 0, & \text{si } p > p_0, \\ h'_{ch}(p) < 0, & \text{si } p < p_0. \end{cases}$$

On a de plus

$$h'_{det}(p_0) = \frac{1}{(\rho_0 c_0)} = \frac{\tau_0}{c_0}.$$

Pour calculer $h'_c(p_0)$, on fait un développement limité autour de p_0 dans l'expression de $h'_c(p)$. On obtient qu'il existe ξ entre p et p_0 tel que

$$h'_{ch}(p) = -\frac{(h'_0(\xi) + h'_0(p))(p - p_0)}{2\sqrt{-h'_0(\xi)(p - p_0)^2}}.$$

On en déduit

$$h'_{ch}(p) = -\operatorname{sgn}(p - p_0) \frac{h'_0(\xi) + h'_0(p)}{2\sqrt{-h'_0(\xi)}} \xrightarrow{p \rightarrow p_0^\pm} \pm \sqrt{-h'_0(p_0)}.$$

Or si $\tau = h_0(p)$, en dérivant l'équation d'Hugoniot (7.11) par rapport à p , on déduit

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau}(h_0(p), p) h'_0(p) + \frac{\partial \varepsilon}{\partial p}(h_0(p), p) + \frac{1}{2}(h_0(p) - \tau_0) + \frac{1}{2}(p + p_0) h'_0(p) = 0, \quad \forall p,$$

et donc

$$h'_0(p) = -\frac{\frac{\partial \varepsilon}{\partial p}(h_0(p), p) + \frac{1}{2}(h_0(p) - \tau_0)}{\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau}(h_0(p), p) + \frac{1}{2}(p + p_0)}.$$

La relation précédente permet de conclure que

$$h'_0(p_0) = -\frac{\frac{\partial \varepsilon}{\partial p}(\tau_0, p_0)}{\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau}(\tau_0, p_0) + p_0}.$$

Maintenant, on a

$$\frac{\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} + p}{\frac{\partial \varepsilon}{\partial p}} = \frac{c^2}{\tau^2}. \quad (7.18)$$

En effet, d'après la relation fondamentale de la thermodynamique (6.2),

$$d\varepsilon = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} d\tau + \frac{\partial \varepsilon}{\partial p} dp = T ds - p d\tau,$$

de sorte que

$$dp = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial p}\right)^{-1} \left(T ds - p d\tau - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} d\tau\right) = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial p}\right)^{-1} \left(T ds - \left(p + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau}\right) d\tau\right).$$

On en déduit

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} = -\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial p}\right)^{-1} \left(p + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau}\right),$$

c'est-à-dire (7.18). Comme (7.18) implique

$$\sqrt{-h'_0(p_0)} = \frac{\tau_0}{c_0},$$

on peut conclure les résultats du lemme concernant la différentiabilité des fonctions $\Phi_{L,0}$ et $\Psi_{L,0}$. Les limites en 0 et en $+\infty$ sont conséquence immédiate de P.1 et P.2. \square

Concernant les fonctions $\Phi_{R,0}$ et $\Psi_{R,0}$, elles vérifient des propriétés similaires, puisque elles peuvent s'obtenir à partir de leurs analogues $\Phi_{L,0}$ et $\Psi_{L,0}$ en remplaçant dans ces dernières la pression p par $p_R(\alpha_0, \rho, s) = \tilde{A}(\alpha_0, s)\rho^{\gamma(\alpha_0)}$. On peut alors énoncer un analogue du lemme 7.3.

Lemme 7.4.

Les fonctions $\Phi_{R,0}$ et $\Psi_{R,0}$ sont de classe C^1 et vérifient

$$\Phi'_{R,0}(p_0) = \sqrt{\frac{\tau_0}{\gamma_0 p_0}} \quad \text{et} \quad \Psi'_{R,0}(p_0) = -\sqrt{\frac{\tau_0}{\gamma_0 p_0}}.$$

De plus, $\Phi_{R,0}$ est une fonction strictement croissante, $\Psi_{R,0}$ strictement décroissante et

$$\lim_{p \rightarrow 0} \Phi_{R,0}(p) = -\frac{2c_0}{\gamma_0 - 1}, \quad \lim_{p \rightarrow +\infty} \Phi_{R,0}(p) = +\infty,$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} \Psi_{R,0}(p) = \sqrt{p_0 \tau_0 \left(\frac{1}{\mu_0^2} - 1\right)}, \quad \lim_{p \rightarrow +\infty} \Psi_{R,0}(p) = -\infty.$$

Les deux lemmes précédents permettent ainsi de caractériser, pour le système d'Euler et pour le système HRM homogène, la projection des courbes d'onde dans le plan (u, p) . Nous renvoyons au prochain paragraphe, notamment aux figures 7.1 à 7.4 pour la représentation graphique de ces courbes.

7.2.4 Le problème de Riemann

Le but de ce paragraphe est de rappeler quelques propriétés sur le problème de Riemann dans le contexte de la dynamique des gaz, notamment la structure de ses solutions.

Le problème de Riemann pour le système (6.1) est le problème de Cauchy, de donnée initiale

$$\begin{cases} U_g, & x < 0, \\ U_d, & x > 0, \end{cases} \quad (7.19)$$

avec $U_g, U_d \in \Omega_L$.

En ce qui concerne le cas général, le résultat d'existence et d'unicité de solution pour un système de lois de conservation avec tous les champs caractéristiques soit vraiment non-linéaires soit linéairement dégénérés, en dimension un d'espace, est dû à Lax ([Lax57]). Il n'est valable que pour des données initiales à variation totale petite, dans la classe des solutions auto-semblables composées d'états constants séparées par des ondes simples, soit des chocs, soit des discontinuités de contact, soit des détente (nous renvoyons à [GR96] pour une démonstration de ce résultat, notamment à la remarque 6.1 du chapitre 6, qui concerne le cas d'un système hyperbolique mais non strictement hyperbolique). Pour des données initiales arbitraires une étude au cas par cas est nécessaire.

Pour le système d'Euler, dans le cadre d'une loi d'état dans les conditions de la section 6.1, le problème de Riemann est bien posé dans la classe de solutions décrite ci-dessus. Sa solution est constituée d'états constants séparés par, dans le cas général, deux ondes associées aux champs caractéristiques vraiment non linéaires, séparées par une discontinuité de contact, associée au champ linéairement dégénéré. Dans le contexte de la section 6.1, où l'on considère une loi d'état satisfaisant certaines propriétés de convexité classiques, seules les ondes simples sont admises et cette solution est unique. La solution générale (dans le sens où toutes les ondes sont d'amplitude non nulle) est donc constitué de 4 états constants U_g, U^*, U^{**} et U_d , séparés par une 1-onde associée au champ caractéristique relatif à la valeur propre $\lambda_1(u) = u - c$, par une 2-discontinuité de contact associée au champ caractéristique linéairement dégénéré, de vitesse $\sigma(U^*, U^{**}) = u^* = u^{**}$, et par une 3-onde associée au champ caractéristique relatif à la valeur propre $\lambda_3(u) = u + c$. Les vitesses de ces trois ondes sont ordonnées de manière croissante. En pratique cette solution peut se construire géométriquement en cherchant l'intersection des courbes de 1-onde et de 3-onde dans le plan (u, p) . Le problème de Riemann a une solution unique si ces courbes se coupent en un seul point. Dans le contexte de la section 6.1, ceci est vrai au moins pour des données initiales *proches*, telles que les courbes de 1-onde et de 3-onde associées respectivement aux états U_g et U_d s'intersectent dans le plan (u, p) (étant vrai pour toute donnée initiale si l'on autorise l'apparition du vide $\rho = 0$.)

Relativement au système HRM homogène, la structure des solutions du problème de Riemann est analogue : le problème de Riemann associé au système (6.8) admet une solution unique constituée elle aussi par la juxtaposition de 4 états constants et par deux familles d'ondes, associées au 1er et 4ème champs caractéristiques, séparées par une discontinuité de contact associée au champ double linéairement dégénéré.

7.3 Analyse de la vitesse des ondes

On passe à l'étude du signe de la vitesse des ondes pour le système d'Euler et pour le système HRM. Cette analyse s'avère essentielle pour l'étude du problème couplé. On va d'abord la faire pour le système d'Euler et puis pour le système HRM homogène. Pour ce dernier, comme le montrent les résultats de la section précédente, α est constant le

long d'un choc ou d'une détente, on se ramènera donc au système d'Euler en considérant la loi de pression (6.10) correspondant à $\gamma = \gamma(\alpha_0)$ fixé.

7.3.1 Vitesse des ondes pour le système d'Euler

Nous nous intéressons au signe de la vitesse des chocs et des détente sur les courbes d'onde pour le système d'Euler. Soit $V_0 = (\rho_0, u_0, p_0) \in \Omega_{V,L}$. Si $V \in \Omega_{V,L}$ et V_0 sont reliés par un choc, alors la vitesse du choc est donnée par $\sigma = u - M\tau = u_0 - M\tau_0$, où

$$M = \frac{u - u_0}{\tau - \tau_0},$$

$\tau = h_0(p)$ et u est une fonction de p donnée par la proposition 7.2. Si V et V_0 sont reliés par une détente, alors le bord de la détente attaché à l'état V_0 se déplace à la vitesse $u_0 \pm c_0$, tandis que le bord de la détente attaché à l'état V se déplace à la vitesse $u \pm c$, le signe $-$ étant valable pour une 1-détente, le signe $+$ pour une 3-détente, où u est une fonction de p donnée par la proposition 7.3 et $c = c(p, s_0)$. On remarque alors que, le long des courbes d'onde, soit le signe de la vitesse des chocs, soit le signe de la vitesse à laquelle se déplacent les bords des détente peuvent être paramétrés par p .

D'autre part, pour un choc on a

$$\sigma = 0 \iff u - M\tau = u_0 - M\tau_0 = 0$$

et donc

$$\sigma = 0 \iff M = \frac{u_0}{\tau_0} \iff \frac{u - u_0}{\tau - \tau_0} = \frac{u_0}{\tau_0}.$$

L'étude du signe de σ ramène alors à résoudre dans la variable p les inéquations

$$\frac{u - u_0}{\tau - \tau_0} \leq (\geq) \frac{u_0}{\tau_0},$$

où le signe \leq correspond à $\sigma \geq 0$ et le signe \geq à $\sigma \leq 0$.

Dans le cas d'une détente, il s'agit d'étudier le signe de $(u \pm c)(p)$.

Le signe de la vitesse des 1-ondes

On étudie d'abord le signe de la vitesse des 1-chocs joignant une état V à V_0 . Nous allons montrer le résultat suivant :

Proposition 7.7 (Signe de la vitesse des 1-chocs).

Soit $V_0 = (\rho_0, u_0, p_0) \in \Omega_{V,L}$. On suppose que P.1 est vérifiée. Alors les propriétés suivantes sont valables sur la partie choc de la courbe $\mathcal{C}_D^{1,L}(V_0)$:

- (i) Si $u_0 \leq c_0$, alors $\sigma(p) \leq 0$, $\forall p \geq p_0$;
- (ii) Si $u_0 > c_0$, alors il existe $p_c^1 = p_c^1(V_0) > p_0$ unique tel que $\sigma(p_c^1) = 0$ et

$$\begin{cases} \sigma(p) > 0, & \text{si } p_0 \leq p < p_c^1, \\ \sigma(p) < 0, & \text{si } p > p_c^1. \end{cases}$$

De façon analogue, on a les propriétés suivantes sur la partie choc de la courbe $\mathcal{C}_G^{1,L}(V_0)$:

- (iii) Si $u_0 \leq \sqrt{\frac{p_0 \tau_0^2}{\tau_{0max} - \tau_0}}$, alors $\sigma(p) \leq 0, \forall p \leq p_0$;
- (iv) Si $\sqrt{\frac{p_0 \tau_0^2}{\tau_{0max} - \tau_0}} < u_0 < c_0$, alors il existe $\hat{p}_c^1 = \hat{p}_c^1(V_0) \in]0, p_0[$ unique tel que $\sigma(\hat{p}_c^1) = 0$ et
- $$\begin{cases} \sigma(p) > 0, & \text{si } p < \hat{p}_c^1, \\ \sigma(p) < 0, & \text{si } \hat{p}_c^1 < p < p_0; \end{cases}$$
- (v) Si $u_0 \geq c_0$, alors $\sigma(p) \geq 0, \forall p \leq p_0$.

Démonstration.

Analysons d'abord le cas des 1-chocs joignant un état V à V_0 à droite. Si $V \in \mathcal{C}_D^{1,L}(V_0)$ est relié à V_0 par une 1-choc, on a alors

$$\tau = h_0(p), \quad u = u_0 - \sqrt{(p - p_0)(\tau - h_0(p))}, \quad p > p_0,$$

(cf. proposition 7.2) et

$$M = \frac{u - u_0}{\tau - \tau_0} > 0.$$

Si $u_0 \leq 0$, on a $\sigma = u_0 - M\tau_0 < u_0 \leq 0$. Si $u_0 > 0$, alors on a

$$\begin{aligned} \sigma = 0 &\iff -\frac{\sqrt{(p - p_0)(\tau_0 - h_0(p))}}{h_0(p) - \tau_0} = \frac{u_0}{\tau_0} \\ &\iff \frac{\sqrt{p - p_0}}{\sqrt{\tau_0 - h_0(p)}} = \frac{u_0}{\tau_0}, \end{aligned}$$

soit

$$u_0^2 = \tau_0^2 \frac{p - p_0}{\tau_0 - h_0(p)} \quad (7.20)$$

(on remarque que, comme h_0 est une fonction décroissante, le long des courbes d'onde les signes de $p - p_0$ et de $h_0(p) - \tau_0$ sont contraires). On pose

$$f_0(p) := \tau_0^2 \frac{p - p_0}{\tau_0 - h_0(p)}, \quad (7.21)$$

de sorte que l'équation (7.20) s'écrit $f_0(p) = u_0^2$. En raisonnant de la même manière, on obtient

$$\begin{cases} \sigma > 0 \iff f_0(p) < u_0^2, \\ \sigma < 0 \iff f_0(p) > u_0^2. \end{cases} \quad (7.22)$$

Or on a, d'une part,

$$f_0'(p) = \tau_0^2 \frac{\tau_0 - h_0(p) + h_0'(p)(p - p_0)}{(\tau_0 - h_0(p))^2} = \tau_0^2 \frac{h_0''(\xi)(p - p_0)^2}{(\tau_0 - h_0(p))^2},$$

avec ξ entre p et p_0 , et donc, puisque h_0 est une fonction convexe, on conclut $f_0'(p) > 0, \forall p > p_0$. D'autre part on a, d'après l'hypothèse P.1,

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} f_0(p) = +\infty$$

et on conclut comme dans la démonstration du lemme 7.3 que

$$f_0(p_0) = -\frac{\tau_0^2}{h'_0(p_0)} = c_0^2.$$

On distingue alors les deux cas suivants :

(1) $u_0^2 > c_0^2$, c'est-à-dire, $u_0 > c_0$. Alors l'équation $f_0(p) = u_0^2$, $p > p_0$, admet une unique solution p_c^1 et on a

$$\begin{cases} \sigma > 0 \iff f_0(p) < u_0^2 \iff p_0 < p < p_c^1, \\ \sigma < 0 \iff f_0(p) > u_0^2 \iff p > p_c^1. \end{cases}$$

(2) $u_0 \leq c_0$. Alors $u_0^2 \leq f_0(p)$, pour tout $p \geq p_0$, et on conclut $\sigma(p) \leq 0$, pour tout $p \geq p_0$.

Passons au cas des 1-chocs joignant un état V à V_0 à gauche. Si $V \in \mathcal{C}_G^{1,L}(V_0)$ est relié à V_0 par un 1-choc, on a cette fois

$$\tau = h_0(p), \quad u = u_0 + \sqrt{(p - p_0)(\tau - h_0(p))}, \quad p < p_0,$$

et $M > 0$. On a à nouveau $\sigma = u_0 - M\tau_0 \leq 0$, si $u_0 \leq 0$. Si $u_0 > 0$, alors on voit comme dans le cas précédent que $\sigma = 0$ si et seulement si l'équation $f_0(p) = u_0^2$, $p \leq p_0$, où f_0 est définie par (7.21), a une solution. Les relations (7.22) sont à nouveau vérifiées. Or on a maintenant

$$f_0(0) = \frac{p_0\tau_0^2}{\tau_{0max} - \tau_0}$$

et, comme $f_0(p_0) = c_0^2$ et f_0 est une fonction strictement croissante, l'équation $f_0(p) = u_0^2$ admet une solution pour $p \leq p_0$ si et seulement si $\frac{p_0\tau_0^2}{\tau_{0max} - \tau_0} \leq u_0^2 \leq c_0^2$, c'est-à-dire si et seulement si $\sqrt{\frac{p_0\tau_0^2}{\tau_{0max} - \tau_0}} \leq u_0 \leq c_0$. Trois cas se présentent alors :

(1)

$$0 < u_0 \leq \sqrt{\frac{p_0\tau_0^2}{\tau_{0max} - \tau_0}}.$$

Alors $f_0(p) > u_0^2$ et donc $\sigma(p) \leq 0$, pour tout $0 < p \leq p_0$.

(2)

$$\sqrt{\frac{p_0\tau_0^2}{\tau_{0max} - \tau_0}} < u_0 < c_0.$$

Alors il existe un point $0 < \hat{p}_c^1 < p_0$ unique tel que $\sigma(\hat{p}_c^1) = 0$ et $\sigma(p) > 0$ si $p < \hat{p}_c^1$, $\sigma(p) < 0$ si $\hat{p}_c^1 < p < p_0$.

(3) $u_0 \geq c_0$. On a dans ce cas $\sigma(p) \geq 0$, pour tout $p \leq p_0$. □

Dans la suite nous adopterons la notation \mathcal{P} au lieu de \mathcal{C} pour désigner les projections des courbes d'ondes dans le plan (u, p) . Ainsi, $\mathcal{P}_D^{1,L}(V_0)$ désigne la projection dans le plan (u, p) de la courbe $\mathcal{C}_D^{1,L}(V_0)$, c'est-à-dire la courbe $u = u_0 - \Phi_{L,0}(p)$, $p > 0$, et ainsi de suite.

Remarque 7.3.

Les points p_c^1 et \hat{p}_c^1 de la proposition précédente sont donnés respectivement par l'intersection des courbes $\mathcal{P}_D^{1,L}(V_0)$ et $\mathcal{P}_G^{1,L}(V_0)$ avec la courbe des chocs de vitesse nulle $u = \rho_0 u_0 h_0(p)$, pour $p \geq p_0$ et pour $p \leq p_0$. En effet, puisque $\sigma(p_c^1) = u_c^1 - M\tau_c^1 = u_0 - M\tau_0 = 0$, on a $M = \frac{u_0}{\tau_0} = u_0 \rho_0$. On en déduit $u_c^1 = M\tau_c^1 = u_0 \rho_0 h_0(p_c^1)$ et donc p_c^1 est le point d'intersection de la courbe $\mathcal{P}_D^{1,L}(V_0)$ avec la courbe $u = \rho_0 u_0 h_0(p)$, pour $p \geq p_0$. On peut raisonner de manière analogue pour \hat{p}_c^1 .

Remarque 7.4.

Dans le cas d'une loi d'état du type gaz parfait polytropique $p(\rho, \varepsilon) = (\gamma - 1)\rho\varepsilon$, on a $\tau_{0max} = \frac{\tau_0}{\mu^2}$ (cf. remarque 7.1) et donc

$$\sqrt{\frac{p_0 \tau_0^2}{\tau_{0max} - \tau_0}} = \sqrt{\frac{p_0 \tau_0^2}{\tau_0 \left(\frac{1}{\mu_0^2} - 1\right)}} = \sqrt{\frac{(\gamma - 1)p_0 \tau_0}{2}},$$

soit

$$\sqrt{\frac{p_0 \tau_0^2}{\tau_{0max} - \tau_0}} = \sqrt{\frac{\gamma - 1}{2\gamma}} c_0.$$

Étudions ensuite le signe de la vitesse des 1-détentes joignant un état V à V_0 . Si $V = (\rho, u, p)$, il s'agit d'étudier le signe de

$$(u - c)(p) = u_0 - \int_{p_0}^p \frac{1}{\rho c}(q, s_0) dq - c(p, s_0)$$

en fonction de p . Nous allons montrer le résultat suivant :

Proposition 7.8 (Signe de la vitesse des 1-détentes).

Soit $V_0 = (\rho_0, u_0, p_0) \in \Omega_{V,L}$. Supposons que P.2 est vérifiée. Alors les propriétés suivantes sont valables sur la partie détente de la courbe $\mathcal{C}_D^{1,L}(V_0)$:

- (i) Si $u_0 \geq c_0$, alors $(u - c)(p) \geq 0$, $\forall p \leq p_0$;
- (ii) Si $-\int_0^{p_0} \frac{1}{\rho c} < u_0 < c_0$, alors il existe $p_{det}^1 = p_{det}^1(V_0) \in]0, p_0[$ unique tel que $(u - c)(p_{det}^1) = 0$ et

$$\begin{cases} (u - c)(p) > 0, & \text{si } p < p_{det}^1, \\ (u - c)(p) < 0, & \text{si } p_{det}^1 < p < p_0; \end{cases}$$

- (iii) Si $u_0 \leq -\int_0^{p_0} \frac{1}{\rho c}$, alors $(u - c)(p) \leq 0$, $\forall p \leq p_0$.

De façon analogue, on a les propriétés suivantes sur la partie détente de la courbe $\mathcal{C}_G^{1,L}(V_0)$:

- (iv) Si $u_0 \leq c_0$, alors $(u - c)(p) \leq 0$, $\forall p \geq p_0$;
- (v) Si $u_0 > c_0$, alors il existe $\hat{p}_{det}^1 = \hat{p}_{det}^1(V_0) > p_0$ unique tel que $(u - c)(\hat{p}_{det}^1) = 0$ et

$$\begin{cases} (u - c)(p) > 0, & \text{si } p_0 < p < \hat{p}_{det}^1, \\ (u - c)(p) < 0, & \text{si } p > \hat{p}_{det}^1. \end{cases}$$

Démonstration.

Analysons à nouveau d'abord le cas des 1-détentes joignant un état V à V_0 à droite. Si $V \in \mathcal{C}_D^{1,L}(V_0)$ et V_0 sont reliés par une 1-détente, alors on a

$$\rho = \rho(p, s_0), \quad u = u_0 - \int_{p_0}^p \frac{1}{(\rho c)(q, s_0)} dq, \quad p \leq p_0.$$

Si $u_0 \geq c_0$, alors $u - c \geq u_0 - c_0 \geq 0$. Si $u_0 < c_0$, on étudie la fonction

$$(u - c)(p) = u_0 - \int_{p_0}^p \frac{1}{\rho c}(q, s_0) dq - c(p, s_0), \quad (7.23)$$

pour $p \leq p_0$. On a

$$(u - c)'(p) = -\frac{1}{(\rho c)(p, s_0)} - \frac{\partial c}{\partial p}(p, s_0).$$

Montrons que $\frac{\partial c}{\partial p}(p, s_0) > 0$. Puisque $c(p, s) = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho}(\rho(p, s), s)}$, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial p}(p, s) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}(\rho, s) \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2}(\rho, s) \frac{\partial \rho}{\partial p}(p, s) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}(\rho, s) \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2}(\rho, s) \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}(\rho, s) \right)^{-1} \\ &= \frac{1}{2c^3} \frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2}(\rho, s), \end{aligned}$$

et on obtient que $\frac{\partial c}{\partial p}(p, s) > 0$, vu que l'on a supposé la fonction $\rho \mapsto p(\rho, s)$ strictement convexe. On a alors $(u - c)'(p) < 0$, $\forall p$. De plus, en vertu de P.2 on a

$$(u - c)(0) = u_0 + \int_0^{p_0} \frac{1}{\rho c}(q, s_0) dq$$

et

$$(u - c)(p_0) = u_0 - c_0 < 0.$$

On obtient ainsi que, entre 0 et p_0 , la fonction $u - c$ décroît de $u_0 + \int_0^{p_0} \frac{1}{\rho c}$ à $u_0 - c_0$. On distingue alors les deux cas suivants :

(1) $u_0 + \int_0^{p_0} \frac{1}{\rho c}(q, s_0) dq \leq 0$. Alors $(u - c)(0) \leq 0$ et on peut conclure $(u - c)(p) \leq 0$, $\forall p \leq p_0$.

(2) $u_0 + \int_0^{p_0} \frac{1}{\rho c}(q, s_0) dq > 0$. Alors il existe un point $p_{det}^1 \in]0, p_0[$ unique tel que $(u - c)(p_{det}^1) = 0$ et $(u - c)(p) > 0$ si $p < p_{det}^1$, $(u - c)(p) < 0$, si $p_{det}^1 < p < p_0$.

Passons maintenant au cas des 1-détentes joignant un état V à V_0 à gauche. Si $V \in \mathcal{C}_G^{1,L}(V_0)$ est relié à V_0 par une 1-détente, alors

$$\rho = \rho(p, s_0), \quad u = u_0 - \int_{p_0}^p \frac{1}{(\rho c)(q, s_0)} dq, \quad p \geq p_0$$

et on a à nouveau que, si $u_0 - c_0 \leq 0$, alors $u - c \leq u_0 - c_0 \leq 0$. Si $u_0 > c_0$, on étudie cette fois-ci la fonction (7.23) pour $p \geq p_0$. Encore une fois on a, d'une part, $(u - c)'(p) < 0$. D'autre part, $(u - c)(p_0) = u_0 - c_0 > 0$ et, d'après P.2, $\lim_{p \rightarrow +\infty} (u - c)(p) = -\infty$. On conclut alors que, pour $p > p_0$, $(u - c)(p)$ décroît de $u_0 - c_0 > 0$ à $-\infty$. On en déduit qu'il existe $\hat{p}_{det}^1 > p_0$ tel que $(u - c)(\hat{p}_{det}^1) = 0$ et $(u - c)(p) > 0$, si $p < \hat{p}_{det}^1$, $(u - c)(p) < 0$, si $p > \hat{p}_{det}^1$. \square

Remarque 7.5.

On a supposé que $\Phi_{L,0}(0) = -\int_0^{p_0} \frac{1}{(\rho c)(q,s_0)} dq$ est fini. C'est le cas, par exemple, pour une loi d'état du type gaz parfait. Les résultats précédents restent toutefois valables dans le cas contraire, avec des adaptations évidentes.

On représente graphiquement dans les diagrammes des pages suivantes les résultats des deux propositions précédentes. On a pris en compte les conclusions du paragraphe (7.2.3), qui nous ont permis de caractériser la projection des courbes d'onde dans le plan (u, p) .

Le signe de la vitesse des 3-ondes

Concernant le signe de la vitesse des 3-chocs et des 3-détentes, on obtient des résultats analogues en étudiant, dans le cas d'un 3-choc joignant un état V à V_0 , le signe de

$$\sigma = u_0 - M\tau_0 = u_0 - \frac{u - u_0}{\tau - \tau_0}\tau_0,$$

où u est la fonction de p donné par la proposition (7.2) et $\tau = h_0(p)$, et, dans le cas d'une 3-détente, le signe de

$$(u + c)(p) = u_0 + \int_{p_0}^p \frac{1}{\rho c}(q, s_0) dq + c(p, s_0).$$

On va alors énoncer les propositions suivantes, qui sont l'analogie des propositions 7.7 et 7.8.

Proposition 7.9 (Signe de la vitesse des 3-chocs).

Soit $V_0 = (\rho_0, u_0, p_0) \in \Omega_{V,L}$. Supposons que P.1 est vérifiée. Alors les propriétés suivantes sont valables sur la partie choc de la courbe $\mathcal{C}_D^{3,L}(V_0)$:

- (i) Si $u_0 \leq -c_0$, alors $\sigma(p) \leq 0, \forall p \leq p_0$;
- (ii) Si $-c_0 < u_0 < -\sqrt{\frac{p_0\tau_0^2}{\tau_{0max}-\tau_0}}$, alors il existe $p_c^3 = p_c^3(V_0) \in]0, p_0[$ unique tel que $\sigma(p_c^3) = 0$ et

$$\begin{cases} \sigma(p) < 0, & \text{si } p < p_c^3, \\ \sigma(p) > 0, & \text{si } p_c^3 < p < p_0; \end{cases}$$

- (iii) Si $u_0 \geq -\sqrt{\frac{p_0\tau_0^2}{\tau_{0max}-\tau_0}}$, alors $\sigma(p) \geq 0, \forall p \leq p_0$;

De façon analogue, les propriétés suivantes sont valables sur la partie choc de la courbe $\mathcal{C}_G^{3,L}(V_0)$:

- (iv) Si $u_0 < -c_0$, alors il existe $\hat{p}_c^3 = \hat{p}_c^3(V_0) \in]p_0, +\infty[$ unique tel que $\sigma(\hat{p}_c^3) = 0$ et

$$\begin{cases} \sigma(p) < 0, & \text{si } p_0 < p < \hat{p}_c^3 \\ \sigma(p) > 0, & \text{si } p > \hat{p}_c^3; \end{cases}$$

- (v) Si $u_0 \geq -c_0$, alors $\sigma(p) \geq 0, \forall p \geq p_0$.

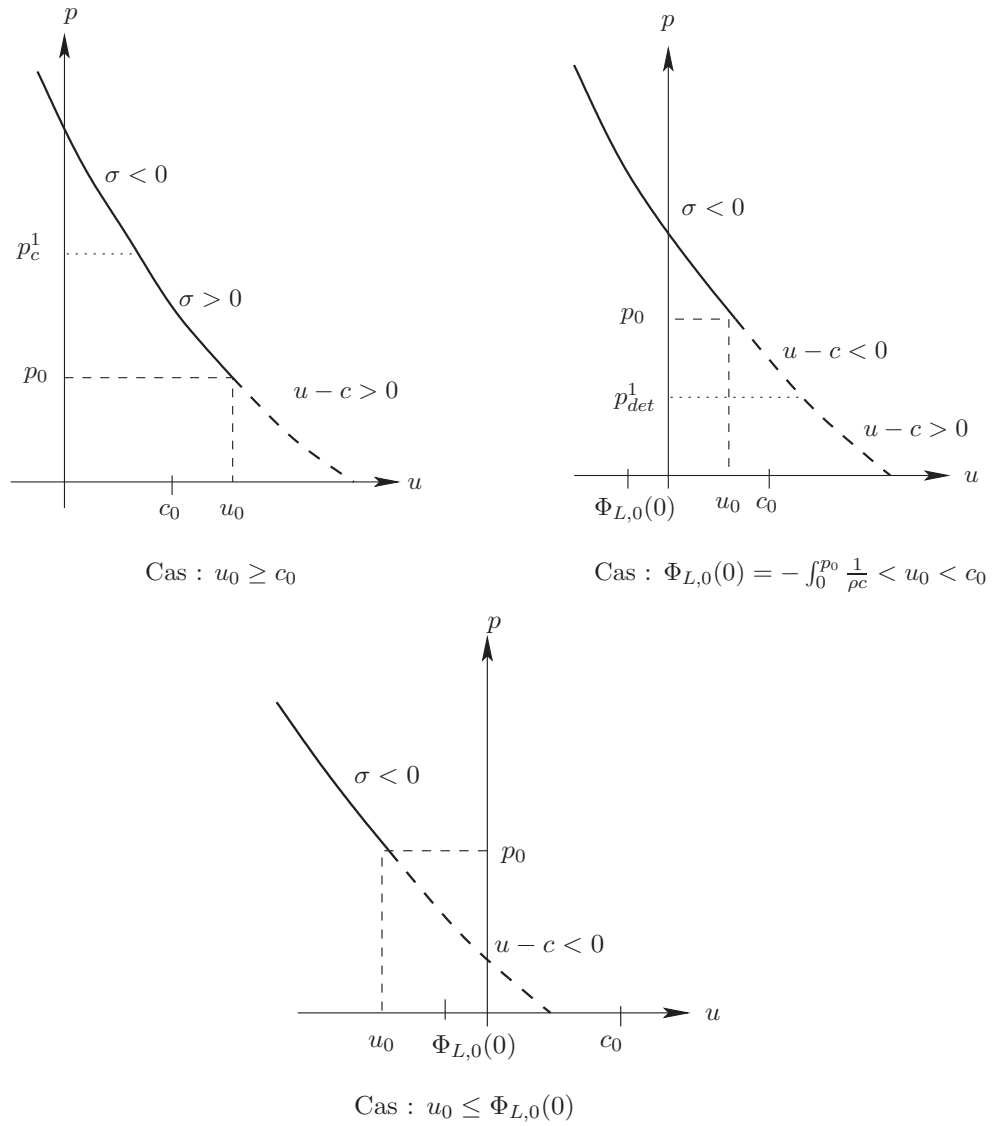


FIG. 7.1 – Signe de la vitesse des ondes sur la courbe $\mathcal{C}_D^{1,L}(V_0)$ des états que l'on peut joindre à V_0 à droite par une 1-onde admissible.

— partie choc de la courbe d'onde
 - - - partie détente de la courbe d'onde

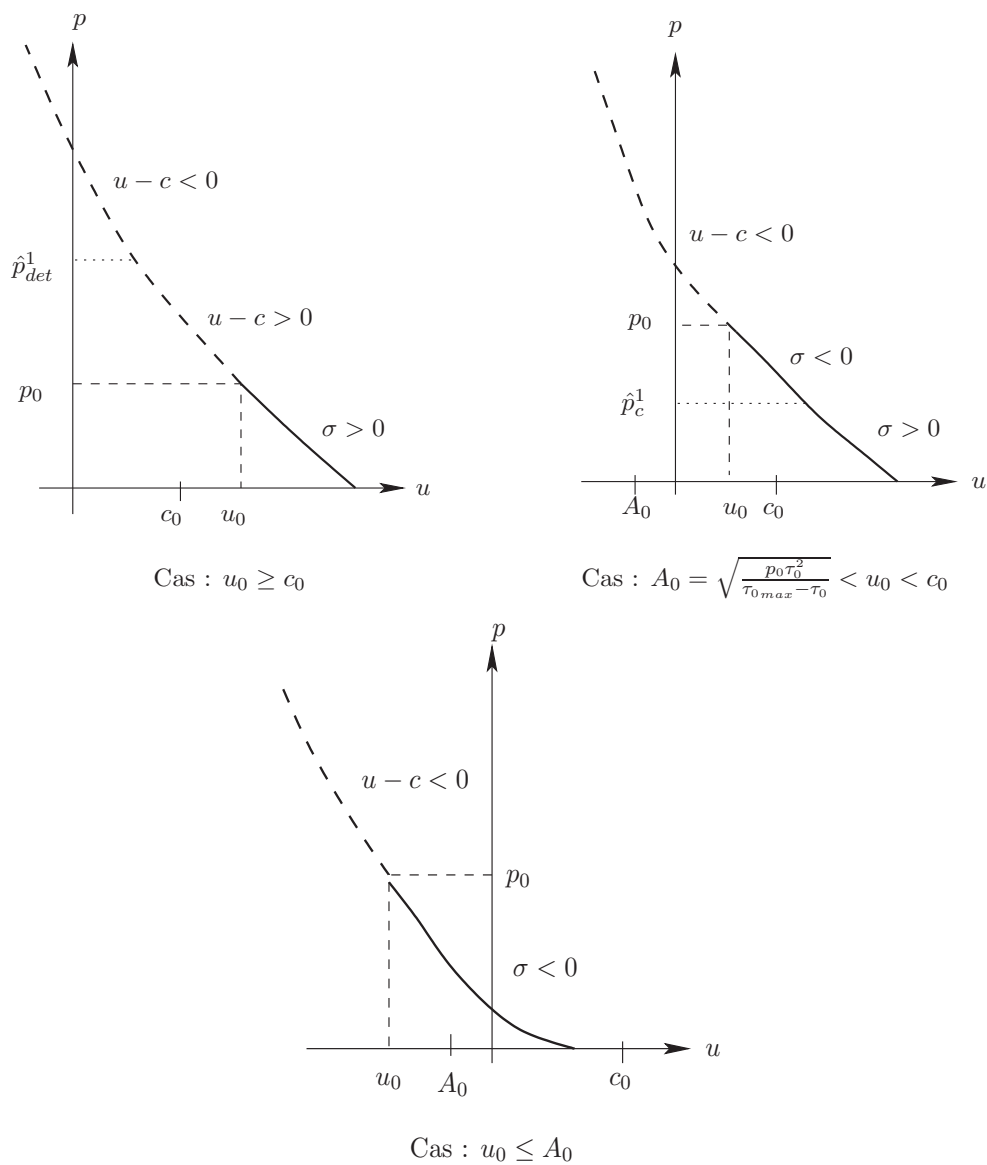


FIG. 7.2 – Signe de la vitesse des ondes sur la courbe $\mathcal{C}_G^{1,L}(V_0)$ des états que l'on peut joindre à V_0 à gauche par une 1-onde admissible.

— partie choc de la courbe d'onde
 - - - partie détente de la courbe d'onde

Démonstration.

La démonstration suit les mêmes principes que celle de la proposition 7.7. Si $V \in \mathcal{C}_D^{3,L}(V_0)$ est relié à V_0 à droite par un 3–choc, on a cette fois $M < 0$ et

$$\tau = h_0(p), \quad u = u_0 - \sqrt{(p - p_0)(\tau - h_0(p))}, \quad p \leq p_0.$$

On a donc que, si $u_0 \geq 0$, alors $\sigma = u_0 - M\tau_0 \geq 0$. Pour $u_0 < 0$, on trouve à nouveau que $\sigma = 0$ si et seulement si l'équation $f_0(p) = u_0^2$, avec f_0 donné par (7.21), a lieu et que les conditions (7.22) sont aussi vérifiées. Or $f_0(0) = \frac{p_0\tau_0^2}{\tau_{0max}-\tau_0}$, $f_0(p_0) = c_0^2$ et f_0 est une fonction strictement croissante. On a à distinguer à nouveau les trois cas (1) $u_0^2 \leq \frac{p_0\tau_0^2}{\tau_{0max}-\tau_0}$; (2) $\frac{p_0\tau_0^2}{\tau_{0max}-\tau_0} < u_0^2 < c_0^2$; (3) $u_0^2 \geq c_0^2$. Dans le premier cas, on a $u_0^2 \leq f_0(p)$, pour tout $p \leq p_0$, et donc $\sigma(p) \geq 0$; dans le deuxième on retrouve que l'équation $f_0(p) = u_0^2$, $p \leq p_0$, a une unique solution p_c^3 vérifiant (ii); finalement dans le troisième cas, on a $f_0(p) \leq u_0^2$ et donc $\sigma(p) \leq 0$, pour tout $p \in]0, p_0]$. Puisque $u_0 < 0$, les situations (1), (2) et (3) correspondent respectivement à $-\sqrt{\frac{p_0\tau_0^2}{\tau_{0max}-\tau_0}} \leq u_0 \leq 0$, $-c_0 < u_0 < -\sqrt{\frac{p_0\tau_0^2}{\tau_{0max}-\tau_0}}$ et à $u_0 \leq -c_0$. On a ainsi montré que (i), (ii) et (iii) se vérifient.

Dans le cas où V est relié à V_0 à gauche par un 3–choc, on a

$$\tau = h_0(p), \quad u = u_0 + \sqrt{(p - p_0)(\tau - h_0(p))}, \quad p \geq p_0.$$

Pour $u_0 \geq 0$, on a à nouveau $\sigma = u_0 - M\tau_0 \geq 0$, puisque $M < 0$ et, pour $u_0 < 0$, il s'agit toujours d'étudier l'équation $f_0(p) = u_0^2$ et les relations (7.22), mais cette fois-ci pour $p \geq p_0$. Or $f_0(p_0) = c_0^2$ et $\lim_{p \rightarrow +\infty} f_0(p) = +\infty$, comme on a vu dans la preuve de la proposition 7.7. Ainsi, d'une part, si $u_0^2 \leq c_0^2$, c'est-à-dire si $u_0 \geq -c_0$, on a $f_0(p) \geq c_0^2$, et donc, d'après (7.22), $\sigma(p) \geq 0$, pour tout $p \geq p_0$. D'autre part, si $u_0^2 > c_0^2$, c'est-à-dire si $u_0 < -c_0$, on retrouve l'existence d'une unique solution $\hat{p}_c^3 \in [p_0, +\infty[$ de l'équation $f_0(p) = u_0^2$ qui vérifie (iv). \square

On montre aussi pour le cas des 3–détentes l'analogie de la proposition 7.8.

Proposition 7.10 (Signe de la vitesse des 3–détentes).

Soit $V_0 = (\rho_0, u_0, p_0) \in \Omega_{V,L}$. On suppose que P.2 est vérifiée. Alors les propriétés suivantes sont valables sur la partie détente de la courbe $\mathcal{C}_D^{3,L}(V_0)$:

- (i) Si $u_0 \geq -c_0$, alors $(u + c)(p) \geq 0$, $\forall p \geq p_0$;
 - (ii) Si $u_0 < -c_0$, alors il existe $p_{det}^3 = p_{det}^3(V_0) > p_0$ unique tel que $(u + c)(p_{det}^3) = 0$
- et

$$\begin{cases} (u + c)(p) < 0, & \text{si } p_0 < p < p_{det}^3, \\ (u + c)(p) > 0, & \text{si } p > p_{det}^3. \end{cases}$$

De façon analogue, on a les propriétés suivantes sur la partie détente de la courbe $\mathcal{C}_G^{3,L}(V_0)$:

- (iii) Si $u_0 \leq -c_0$, alors $(u + c)(p) \leq 0$, $\forall p \leq p_0$;

(iv) Si $-c_0 < u_0 < \int_0^{p_0} \frac{1}{\rho c}$, alors il existe $\hat{p}_{det}^3 = \hat{p}_{det}^3(V_0) \in]0, p_0[$ unique tel que $(u+c)(\hat{p}_{det}^3) = 0$ et

$$\begin{cases} (u+c)(p) < 0, & \text{si } p < \hat{p}_{det}^3, \\ (u+c)(p) > 0, & \text{si } \hat{p}_{det}^3 < p < p_0; \end{cases}$$

(v) Si $u_0 \geq \int_0^{p_0} \frac{1}{\rho c}$, alors $(u+c)(p) \geq 0, \forall p \leq p_0$.

Démonstration.

Encore une fois, la preuve est analogue à celle de la proposition (7.12). Si V est relié à droite à V_0 par une 3-détente, alors

$$\rho = \rho(p, s_0), \quad u = u_0 + \int_{p_0}^p \frac{1}{(\rho c)(q, s_0)} dq, \quad (7.24)$$

avec $p \geq p_0$ et, si $u_0 \geq -c_0$, alors on a $u+c \geq u_0+c_0 \geq 0$. Si $u_0 < -c_0$, on étudie cette fois-ci la fonction

$$(u+c)(p) = u_0 + \int_{p_0}^p \frac{1}{\rho c}(q, s_0) dq + c(p, s_0), \quad (7.25)$$

pour $p \geq p_0$. On a

$$(u+c)'(p) = \frac{1}{(\rho c)(p, s_0)} + \frac{\partial c}{\partial p}(p, s_0) > 0,$$

comme l'on a montré dans la preuve de la proposition 7.8. De plus,

$$(u+c)(p_0) = u_0 + c_0 < 0$$

et

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} (u+c)(p) = +\infty,$$

d'après l'hypothèse P.2. On obtient ainsi que, entre p_0 et $+\infty$, la fonction $(u+c)(p)$ croît strictement de $u_0+c_0 < 0$ à $+\infty$ et on en déduit l'existence d'un unique zéro $\hat{p}_{det}^3 \in [p_0, +\infty[$ qui vérifie (ii) de la proposition.

Si V est relié à gauche à V_0 par une détente, on a (7.24), avec $p \leq p_0$. On a à nouveau que, si $u_0+c_0 \leq 0$, alors $u+c \leq u_0+c_0 \leq 0$. Si $u_0 > -c_0$, il s'agit maintenant d'étudier la fonction (7.25) pour $p \leq p_0$. Or $(u+c)(p_0) = u_0+c_0 > 0$ et

$$\lim_{p \rightarrow 0} (u+c)(p) = u_0 - \int_0^{p_0} \frac{1}{(\rho c)(q, s_0)} dq$$

et donc, puisque $(u+c)'(p) > 0$, la fonction (7.25) croît strictement de $u_0 - \int_0^{p_0} \frac{1}{(\rho c)(q, s_0)} dq$ à $u_0+c_0 > 0$. Les deux situations suivantes sont alors possibles :

- (1) $u_0 - \int_0^{p_0} \frac{1}{(\rho c)(q, s_0)} dq \geq 0$. Alors $(u+c)(p) \geq 0$, pour tout $p \leq p_0$.
- (2) $u_0 - \int_0^{p_0} \frac{1}{(\rho c)(q, s_0)} dq < 0$. Alors on déduit l'existence d'un unique point $\hat{p}_{det}^3 \in]0, p_0[$ tel que $(u+c)(\hat{p}_{det}^3) = 0$ et qui vérifie (iv). \square

On obtient alors les diagrammes des pages suivantes représentant le signe de la vitesse des ondes sur les courbes de 3-onde.

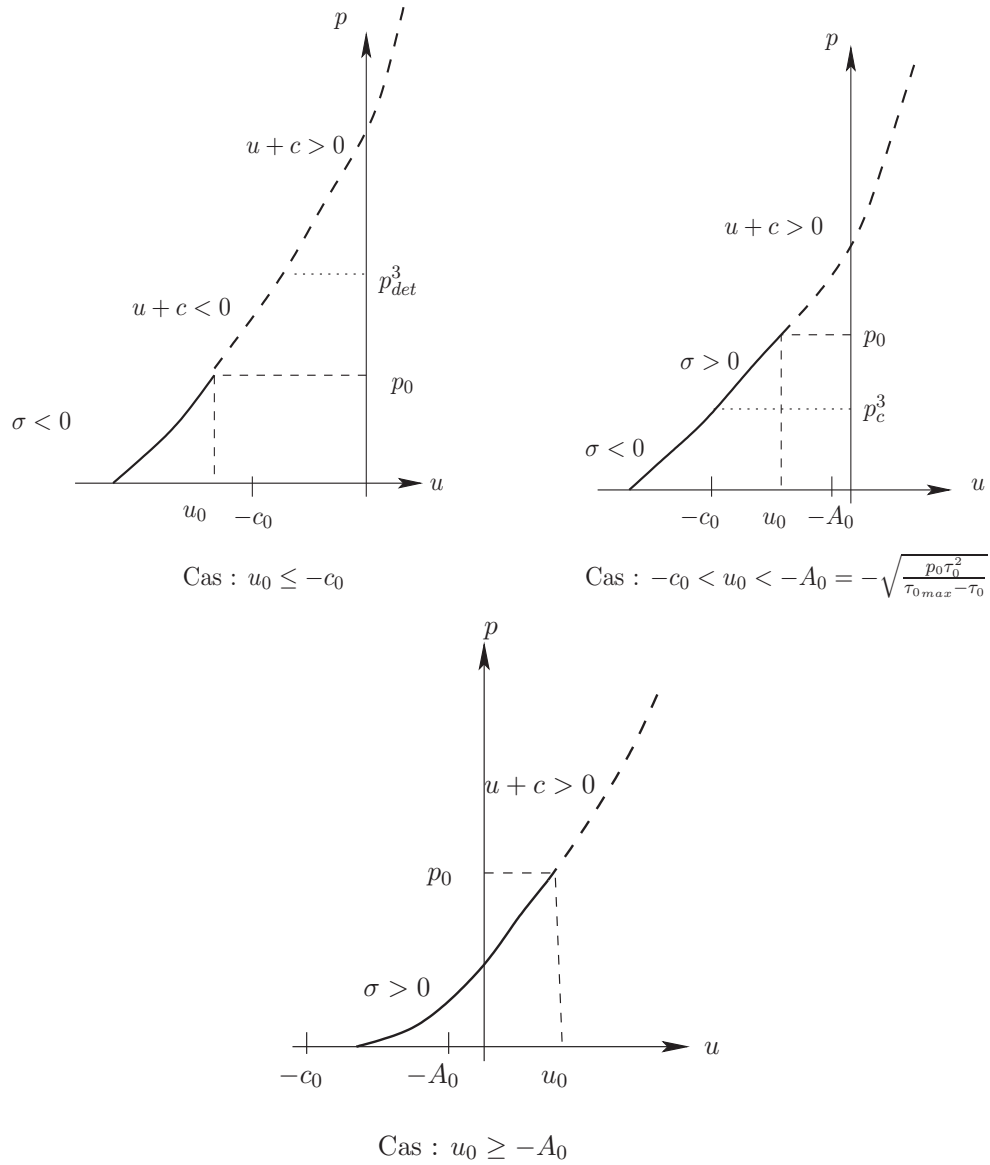


FIG. 7.3 – *Signe des vitesses des ondes sur la courbe $\mathcal{C}_D^{3,L}(V_0)$ des états que l'on peut joindre à V_0 à droite par une 3-onde admissible.*

— partie choc de la courbe d'onde
 - - - partie détente de la courbe d'onde

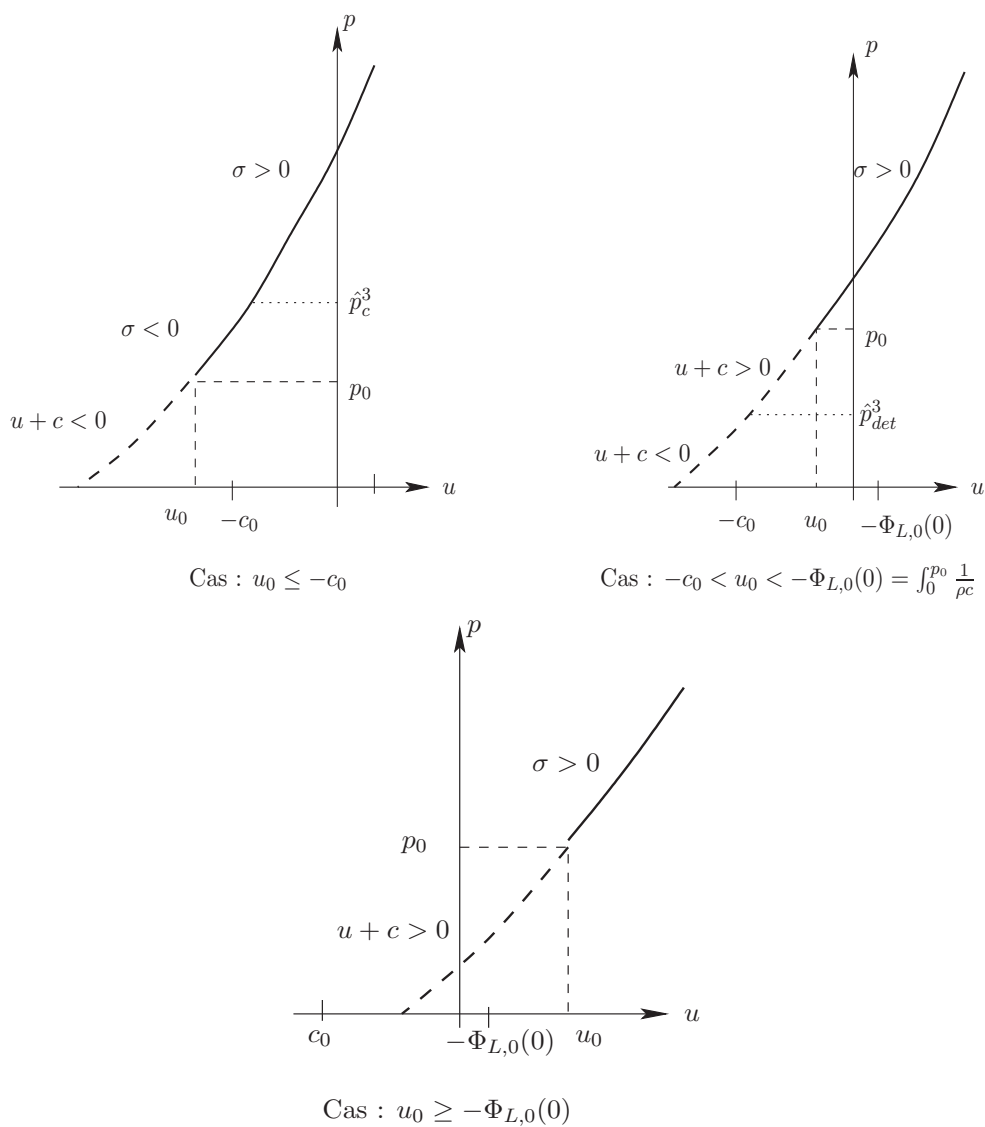


FIG. 7.4 – Signe des vitesses des ondes sur la courbe $\mathcal{C}_G^{3,L}(V_0)$ des états que l'on peut joindre à V_0 à gauche par une 3-onde admissible.

— partie choc de la courbe d'onde
 - - - partie détente de la courbe d'onde

7.3.2 Vitesse des ondes pour le système HRM homogène

Pour étudier le signe de la vitesse des ondes pour le système HRM homogène, nous prenons en compte les résultats obtenus au paragraphe précédent. Puisque sur les courbes d'onde associées à un état V_0 on a $\alpha = \alpha_0$, l'étude du signe de la vitesse des chocs et des détenteurs pour le système HRM homogène peut se faire en reprenant les résultats obtenus pour le système d'Euler dans le cas concret de la loi d'état définie par $p(\rho, \varepsilon) = (\gamma(\alpha_0) - 1)\rho\varepsilon$.

On peut alors énoncer pour le système HRM homogène l'analogue des propositions 7.7 et 7.8, pour les 1-ondes, et 7.9 et 7.10, pour les 4-ondes.

Le signe de la vitesse des 1-ondes

Si V et $V_0 \in \Omega_{V,R}$ sont reliés par un 1-choc, on a, d'après la proposition 7.5, $\alpha = \alpha_0$, et la vitesse du choc est donné par $\sigma = u - M\tau = u_0 - M\tau_0$, où $M = \frac{u-u_0}{\tau-\tau_0}$ et

$$\tau = \mathfrak{h}_0(\alpha_0; p), \quad u = u_0 - \sqrt{(p - p_0)(\tau_0 - \mathfrak{h}_0(\alpha_0; p))}, \quad p \geq p_0.$$

Puisque

$$\mathfrak{h}_0(\alpha_0; p) = \tau_0 \frac{\mu_0^2 p + p_0}{p + p_0 \mu_0^2},$$

les solutions de l'équation $\sigma = 0$ peuvent se calculer maintenant de façon explicite. On peut alors énoncer un analogue de la proposition 7.7.

Proposition 7.11 (Signe de la vitesse des 1-chocs).

Soit $V_0 = (\alpha_0, \rho_0, u_0, p_0) \in \Omega_{V,R}$. Alors les propriétés suivantes sont valables sur la partie choc de la courbe $\mathcal{C}_D^{1,R}(V_0)$:

- (i) Si $u_0 \leq c_0$, alors $\sigma(p) \leq 0$, $\forall p \geq p_0$;
- (ii) Si $u_0 > c_0$, on pose $\bar{p}_c^1 = \bar{p}_c^1(V_0) = \frac{u_0^2}{\tau_0}(1 - \mu_0^2) - p_0 \mu_0^2$. Alors \bar{p}_c^1 est l'unique point $p > p_0$ tel que $\sigma(\bar{p}_c^1) = 0$ et

$$\begin{cases} \sigma(p) > 0, & \text{si } p_0 \leq p < \bar{p}_c^1, \\ \sigma(p) < 0, & \text{si } p > \bar{p}_c^1. \end{cases}$$

De façon analogue, les propriétés suivantes sont valables sur la partie choc de la courbe $\mathcal{C}_G^{1,R}(V_0)$:

- (iii) Si $u_0 \leq \sqrt{\frac{\gamma_0 - 1}{2\gamma_0}} c_0$, alors $\sigma(p) \leq 0$, $\forall p \leq p_0$;
- (iv) Si $\sqrt{\frac{\gamma_0 - 1}{2\gamma_0}} c_0 < u_0 < c_0$, on pose $\hat{p}_c^1 = \hat{p}_c^1(V_0) = \frac{u_0^2}{\tau_0}(1 - \mu_0^2) - p_0 \mu_0^2$. Alors \hat{p}_c^1 est l'unique point $p \in]0, p_0[$ tel que $\sigma(\hat{p}_c^1) = 0$ et

$$\begin{cases} \sigma(p) > 0, & \text{si } p < \hat{p}_c^1, \\ \sigma(p) < 0, & \text{si } \hat{p}_c^1 < p < p_0; \end{cases}$$

- (v) Si $u_0 \geq c_0$, alors $\sigma(p) \geq 0$, $\forall p \leq p_0$.

Démonstration.

On reprend le contexte de la démonstration de la proposition 7.7 en considérant le cas particulier de la loi d'état $p(\rho, \varepsilon) = (\gamma_0 - 1)\rho\varepsilon$. Il suffit ici de remarquer que, en vertu de (7.17), l'équation

$$u_0^2 = \tau_0^2 \frac{p - p_0}{\tau_0 - \mathfrak{h}_0(\alpha_0, p)}$$

s'écrit

$$\tau_0^2 \frac{(p - p_0)(p + p_0\mu_0^2)}{\tau_0(1 - \mu_0^2)(p - p_0)} = u_0^2, \quad (7.26)$$

c'est-à-dire

$$\tau_0(p + p_0\mu_0^2) = u_0^2(1 - \mu_0^2) \iff \tau_0 p = u_0^2(1 - \mu_0^2) - \tau_0 p_0\mu_0^2,$$

soit

$$p = \frac{u_0^2}{\tau_0}(1 - \mu_0^2) - p_0\mu_0^2.$$

D'autre part, on a (cf. remarque 7.4)

$$\sqrt{\frac{p_0\tau_0^2}{\tau_{0max} - \tau_0}} = \sqrt{\frac{(\gamma_0 - 1)}{2\gamma_0}}c_0.$$

On conclut le résultat de la proposition en suivant les pas de la preuve de la proposition 7.7. \square

Dans le cas d'une 1-détente joignant un état V à V_0 , on a, d'après (7.16), que

$$\int_{p_0}^p \frac{1}{(\rho c)(\alpha_0, p, s_0)} dq = \frac{2}{\gamma_0 - 1} (c(\alpha_0, p, s_0) - c_0)$$

et on peut énoncer la proposition suivante dont la preuve est analogue à celle de la proposition.

Proposition 7.12 (Signe de la vitesse des 1-détentes).

Soit $V_0 = (\alpha_0, \rho_0, u_0, p_0) \in \Omega_{V,R}$. Alors les propriétés suivantes sont valables sur la partie détente de la courbe $\mathcal{C}_D^{1,R}(V_0)$:

- (i) Si $u_0 \geq c_0$, alors $(u - c)(p) \geq 0$, $\forall p \leq p_0$;
- (ii) Si $-\frac{2c_0}{\gamma_0 - 1} < u_0 < c_0$, il existe $\bar{p}_{det}^1 = \bar{p}_{det}^1(V_0) \in]0, p_0[$ unique tel que $(u - c)(\bar{p}_{det}^1) = 0$ et

$$\begin{cases} (u - c)(p) > 0, & \text{si } p < \bar{p}_{det}^1, \\ (u - c)(p) < 0, & \text{si } \bar{p}_{det}^1 < p < p_0; \end{cases}$$

- (iii) Si $u_0 \leq -\frac{2c_0}{\gamma_0 - 1}$, alors $(u - c)(p) \leq 0$, $\forall p \leq p_0$.

De façon analogue, on a les propriétés suivantes sur la partie détente de la courbe $\mathcal{C}_G^{1,R}(V_0)$:

- (iv) Si $u_0 \leq c_0$, alors $(u - c)(p) \leq 0$, $\forall p \geq p_0$;

(v) Si $u_0 > c_0$, alors il existe $\hat{p}_{det}^1 = \hat{p}_{det}^1(V_0) > p_0$ unique tel que $(u - c)(\hat{p}_{det}^1) = 0$
et

$$\begin{cases} (u - c)(p) > 0, & \text{si } p_0 < p < \hat{p}_{det}^1, \\ (u - c)(p) < 0, & \text{si } p > \hat{p}_{det}^1. \end{cases}$$

Démonstration.

Il suffit de remarquer que, d'après (7.16), on a

$$- \int_0^{p_0} \frac{1}{(\rho c)}(\alpha_0, q, s_0) dq = - \frac{2c_0}{\gamma_0 - 1}.$$

La preuve se conclut alors en appliquant les résultats de la proposition 7.8. \square

Pour la représentation graphique des résultats des propositions précédentes, on peut se rapporter aux figures 7.1 et 7.2, avec des adaptations évidentes.

Le signe de la vitesse des 4-ondes

Dans le cas des 4-ondes, on va énoncer sans démontrer les propositions suivantes concernant le signe de la vitesse des ondes. Les preuves de ces propositions se font de manière triviale, comme pour les 1-ondes, en suivant respectivement celles des propositions 7.9 et 7.10. On les omettra ici.

Proposition 7.13 (Signe de la vitesse des 4-chocs).

Soit $V_0 = (\alpha_0, \rho_0, u_0, p_0) \in \Omega_{V,R}$. Alors les propriétés suivantes sont valables sur la partie choc de la courbe $\mathcal{C}_D^{4,R}(V_0)$:

(i) Si $u_0 \leq -c_0$, alors $\sigma(p) \leq 0$, $\forall p \leq p_0$;

(ii) Si $-c_0 < u_0 < -c_0 \sqrt{\frac{\gamma_0 - 1}{2\gamma_0}}$, on pose $p_c^4 = p_c^4(V_0) = \frac{u_0^2}{\tau_0}(1 - \mu_0^2) - p_0 \mu_0^2$. Alors p_c^4 est l'unique point $p < p_0$ tel que $\sigma(p_c^4) = 0$ et

$$\begin{cases} \sigma(p) < 0, & \text{si } p < p_c^4, \\ \sigma(p) > 0, & \text{si } p_c^4 < p < p_0; \end{cases}$$

(iii) Si $u_0 \geq -c_0 \sqrt{\frac{\gamma_0 - 1}{2\gamma_0}}$, alors $\sigma(p) \geq 0$, $\forall p \leq p_0$;

De façon analogue, les propriétés suivantes sont valables sur la partie choc de la courbe $\mathcal{C}_G^{4,R}(V_0)$ des états qui joignent V_0 à gauche par un 4-choc :

(iv) Si $u_0 < -c_0$, on pose $\hat{p}_c^4 = \hat{p}_c^4(V_0) = \frac{u_0^2}{\tau_0}(1 - \mu_0^2) - p_0 \mu_0^2$. Alors \hat{p}_c^4 est l'unique point $p > p_0$ tel que $\sigma(\hat{p}_c^4) = 0$ et

$$\begin{cases} \sigma(p) < 0, & \text{si } p_0 < p < \hat{p}_c^4 \\ \sigma(p) > 0, & \text{si } p > \hat{p}_c^4; \end{cases}$$

(v) Si $u_0 \geq -c_0$, alors $\sigma(p) \geq 0$, $\forall p \geq p_0$.

Proposition 7.14 (Signe de la vitesse des 4-détentes).

Soit $V_0 = (\alpha_0, \rho_0, u_0, p_0) \in \Omega_{V,R}$. Alors les propriétés suivantes sont valables sur la partie détente de la courbe $\mathcal{C}_D^{4,R}(V_0)$:

- (i) Si $u_0 \geq -c_0$, alors $(u+c)(p) \geq 0$, $\forall p \geq p_0$;
(ii) Si $u_0 < -c_0$, alors il existe $p_{det}^4 = p_{det}^4(V_0) > p_0$ unique tel que $(u+c)(p_{det}^4) = 0$
et
$$\begin{cases} (u+c)(p) < 0, & \text{si } p_0 < p < p_{det}^4, \\ (u+c)(p) > 0, & \text{si } p > p_{det}^4. \end{cases}$$

De façon analogue, on a les propriétés suivantes sur la partie détente de la courbe $\mathcal{C}_G^{A,R}(V_0)$ des états qui joignent V_0 à gauche par une 4-détente :

- (iii) Si $u_0 \leq -c_0$, alors $(u+c)(p) \leq 0$, $\forall p \leq p_0$;
(iv) Si $-c_0 < u_0 < \frac{2}{\gamma_0-1}c_0$, alors il existe $\hat{p}_{det}^4 = \hat{p}_{det}^4(V_0) \in]0, p_0[$ unique tel que
 $(u+c)(\hat{p}_{det}^4) = 0$ et

$$\begin{cases} (u+c)(p) < 0, & \text{si } p < \hat{p}_{det}^4, \\ (u+c)(p) > 0, & \text{si } \hat{p}_{det}^4 < p < p_0; \end{cases}$$

- (v) Si $u_0 \geq \frac{2}{\gamma_0-1}c_0$, alors $(u+c)(p) \geq 0$, $\forall p \leq p_0$.

Encore une fois, nous renvoyons aux figures 7.3 et 7.4, avec les adaptations nécessaires, pour une représentation graphique des deux propositions précédentes.

7.4 Les conditions de couplage

Nous nous intéressons désormais aux conditions de couplage pour le problème (7.1). En conséquence de l'étude faite aux sections précédentes, nous sommes maintenant en mesure de décrire les ensembles \mathcal{O}_L et \mathcal{O}_R introduits à la section 7.1. Nous effectuons un couplage par état modifié en variables $V_L = (\rho, u, p)$ et $V_R = (\alpha, \rho, u, p)$ et souhaitons décrire concrètement les conditions (7.3) :

$$\begin{aligned} (\rho, u, p)(0^-, t) &\in \mathcal{O}_L((\rho, u, p)(0^+, t)), \quad \forall t > 0, \\ (\alpha, \rho, u, p)(0^+, t) &\in \mathcal{O}_R((\alpha_{eq}(\rho), \rho, u, p)(0^-, t)), \quad \forall t > 0. \end{aligned}$$

Pour ce faire, on va d'abord étudier en fonction de $V_d \in \Omega_{V,L}$ et de $V_g \in \Omega_{V,R}$ les ensembles

$$\mathcal{O}_L(V_d) = \{Z_L(0^-; V, V_d) : V \in \Omega_{V,L}\} \quad (7.27)$$

et

$$\mathcal{O}_R(V_g) = \{Z_R(0^+; V_g, V) : V \in \Omega_{V,R}\}, \quad (7.28)$$

où, pour $V \in \Omega_{V,L}$, $Z_L(\frac{x}{t}; V, V_d)$ est la solution du problème de Riemann pour le système d'Euler, exprimée en variables V_L , de donnée initiale

$$\begin{cases} V, & x < 0, \\ V_d, & x > 0, \end{cases} \quad (7.29)$$

et, pour $V \in \Omega_{V,R}$, $Z_R(\frac{x}{t}; V_g, V)$ est la solution du problème de Riemann pour le système HRM homogène, exprimée en variables V_R , de donnée initiale

$$\begin{cases} V_g, & x < 0, \\ V, & x > 0. \end{cases} \quad (7.30)$$

On commence par étudier l'ensemble $\mathcal{O}_R(V_g)$.

7.4.1 L'ensemble $\mathcal{O}_R(V_g)$

L'ensemble $\mathcal{O}_R(V_g)$ est l'ensemble des traces en $\frac{x}{t} = 0^+$ des solutions de tous les problèmes de Riemann pour le système HRM homogène dont la donnée initiale est égale à V_g pour $x < 0$.

Soit $V \in \Omega_{V,R}$ et $Z_R(\frac{x}{t}; V_g, V)$ la solution du problème de Riemann pour le système (6.12), de donnée initiale (7.30). On suppose ici que Z_R est composée de trois ondes d'amplitude non nulle et donc que Z_R est composée de quatre états constants séparés par une 1-onde, par une double discontinuité de contact et par une 4-onde. On se trouve alors dans l'une des quatre situations suivantes :

- (i) $Z_R(\frac{x}{t}; V_g, V)$ est constitué par trois ondes de vitesse strictement positive ;
- (ii) $Z_R(\frac{x}{t}; V_g, V)$ est constitué par deux ondes de vitesse strictement positive et par une onde de vitesse négative ;
- (iii) $Z_R(\frac{x}{t}; V_g, V)$ est constitué par une onde de vitesse strictement positive et par deux ondes de vitesse négative ;
- (iv) $Z_R(\frac{x}{t}; V_g, V)$ est constitué par trois ondes, toutes de vitesse négative. On introduit

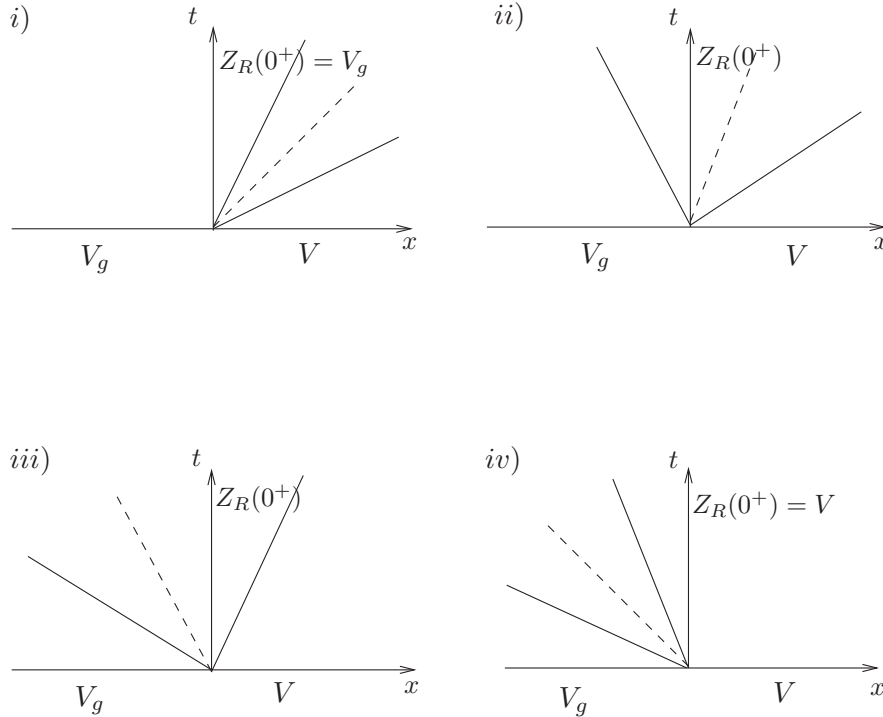


FIG. 7.5 – La solution $Z_R(\frac{x}{t}; V_g, V)$.

ainsi les ensembles suivants :

$\mathcal{C}_D^{1,-}(V_g)$ la partie de la courbe de 1-onde $\mathcal{C}_D^{1,L}(V_g)$ correspondant à des ondes de vitesse négative, c'est-à-dire l'ensemble des états $V \in \Omega_{V,R}$ que l'on peut relier à V_g à droite par une 1-onde de vitesse négative ;

$\mathcal{S}_D^-(V_g)$ l'ensemble des états $V \in \Omega_{V,R}$ que l'on peut relier à V_g à droite par une 1-onde suivie d'une discontinuité de contact de vitesse négative ;

$\mathcal{V}_D^-(V_g)$ l'ensemble des états $V \in \Omega_{V,R}$ que l'on peut relier à V_g à droite par une 1-onde suivie d'une discontinuité de contact et d'une 3-onde, toutes de vitesses négatives.

Contrairement aux notations utilisées jusqu'à présent, nous avons choisi d'omettre dans les ensembles ci-dessus les indices R en référence au système HRM, pour ne pas surcharger le texte.

On vérifie alors que, dans la situation (i), $Z_R(0^+; V_g, V) = V_g$. Dans la situation (ii), l'état $Z_R(0^+; V_g, V)$ est relié à droite à V_g par une 1-onde de vitesse négative et appartient donc à l'ensemble $\mathcal{C}_D^{1,-}(V_g)$. Dans la situation (iii), $Z_R(0^+; V_g, V)$ est relié à droite à V_g par une 1-onde suivie d'une discontinuité de contact de vitesses négatives. Il appartient alors à l'ensemble $\mathcal{S}_D^-(V_g)$. Finalement, dans la situation (iv), $Z_R(0^+; V_g, V)$ est l'état V , qui est relié à V_g à droite par une 1-onde suivie d'une discontinuité de contact et d'une 3-onde de vitesses négatives et qui appartient donc à l'ensemble $\mathcal{V}_D^-(V_g)$.

On a ainsi, d'une part,

$$\mathcal{O}_R(V_g) \subseteq \{V_g\} \cup \mathcal{C}_D^{1,-}(V_g) \cup \mathcal{S}_D^-(V_g) \cup \mathcal{V}_D^-(V_g).$$

En effet, si $\bar{V} \in \mathcal{O}_R(V_g)$, alors $\bar{V} = Z_R(0^+; V_g, V)$, pour un certain $V \in \Omega_{V,R}$. Si Z_R est composé de 3 ondes d'amplitude non nulle, une des quatre situations (i)-(iv) ci-dessus est vérifiée, et l'inclusion est alors évidente, d'après les considérations faites plus haut. Si Z_R n'est composé que de deux, une ou aucune onde d'amplitude non nulle, on remarque que Z_R peut être vu comme étant constitué de trois ondes où les ondes supplémentaires correspondent à des ondes d'amplitude nulle reliant le même état. Or étant donné un état $V \in \Omega_{V,R}$ quelconque, l'ensemble des états que l'on peut relier à V par un certain type d'onde inclut le propre état V et on peut englober ce cas dans le précédent.

Il est d'autre part évident que

$$\{V_g\} \cup \mathcal{C}_D^{1,-}(V_g) \cup \mathcal{S}_D^-(V_g) \cup \mathcal{V}_D^-(V_g) \subseteq \mathcal{O}_R(V_g),$$

car, d'un côté, V_g peut être vu comme la trace en 0^+ de la solution du problème de Riemann de donnée initiale V_g pour le système HRM homogène et, d'un autre côté, si $\bar{V} \in \Omega_{V,R}$ appartient à un des trois ensembles $\mathcal{C}_D^{1,-}(V_g)$, $\mathcal{S}_D^-(V_g)$ ou $\mathcal{V}_D^-(V_g)$, alors \bar{V} est bien la trace en 0^+ de la solution du problème de Riemann pour le système HRM homogène, de donnée initiale

$$\begin{cases} V_g, & x < 0 \\ \bar{V}, & x > 0. \end{cases}$$

Cette solution est composée d'une, de deux ou de trois ondes de vitesse négative selon que \bar{V} appartient respectivement à $\mathcal{C}_D^{1,-}(V_g)$, $\mathcal{S}_D^-(V_g)$ ou $\mathcal{V}_D^-(V_g)$. Il est alors clair que l'on peut caractériser l'ensemble $\mathcal{O}_R(V_g)$ de la façon suivante :

Théorème 7.1.

Soit $V_g \in \Omega_{V,R}$. Alors

$$\mathcal{O}_R(V_g) = \{V_g\} \cup \mathcal{C}_D^{1,-}(V_g) \cup \mathcal{S}_D^-(V_g) \cup \mathcal{V}_D^-(V_g).$$

On est alors amené à décrire les ensembles $\mathcal{C}_D^{1,-}(V_g)$, $\mathcal{S}_D^-(V_g)$ et $\mathcal{V}_D^-(V_g)$ du théorème précédent. Pour ce faire, nous allons prendre en compte les résultats obtenus à la section 7.3 sur le signe de la vitesse des ondes.

L'ensemble $\mathcal{C}_D^{1,-}(V_g)$

On commence par décrire l'ensemble $\mathcal{C}_D^{1,-}(V_g)$. Il s'agit de décrire tous les états que l'on peut relier à V_g à droite soit par un 1–choc se propageant à une vitesse négative soit par une 1–détente dont le bord de droite se déplace à une vitesse négative. Le signe de la vitesse de ce type d'ondes est décrit respectivement par les propositions 7.11 et 7.12 (cf. aussi la figure 7.1, en remplaçant p_c^1 , p_{det}^1 et $\Phi_{L,0}$ respectivement par \bar{p}_c^1 , \bar{p}_{det}^1 et $\Phi_{R,0}$). La proposition suivante est alors une conséquence immédiate de ces résultats, en faisant V_g jouer le rôle de V_0 .

Proposition 7.15.

Soit $V_g \in \Omega_{V,R}$. L'ensemble $\mathcal{C}_D^{1,-}(V_g)$ est décrit par :

1. Si $u_g \leq \Phi_{R,g}(0) = -\int_0^{p_g} \frac{1}{(\rho c)(\alpha_g, q, s_g)}$, tout l'ensemble $\mathcal{C}_D^{1,R}(V_g)$;
2. Si $\Phi_{R,g}(0) < u_g < c_g$, les états $V(p) \in \mathcal{C}_D^{1,R}(V_g)$ tels que $p \geq \bar{p}_{det}^1(V_g)$;
3. Si $u_g \geq c_g$, les états $V(p) \in \mathcal{C}_D^{1,R}(V_g)$ tels que $p \geq \bar{p}_c^1(V_g)$.

On pose

$$p_{min}^1 = p_{min}^1(V_g) = \begin{cases} 0, & u_g \leq -\int_0^{p_g} \frac{1}{(\rho c)(\alpha_g, q, s_g)}, \\ \bar{p}_{det}^1(V_g), & -\int_0^{p_g} \frac{1}{\rho c} < u_g < c_g, \\ \bar{p}_c^1(V_g), & u_g \geq c_g. \end{cases}$$

On conclut alors de la proposition précédente que l'ensemble $\mathcal{C}_D^{1,-}(V_g)$ correspond aux états $(\alpha, \rho, u, p) \in \Omega_{V,R}$ tels que $\alpha = \alpha_g$, $u = u_g - \Phi_{R,g}(p)$, $\rho = \varphi_{R,g}(p)$ et $p \geq p_{min}^1(V_g)$.

L'ensemble $\mathcal{S}_D^-(V_g)$

Nous caractérisons ensuite l'ensemble $\mathcal{S}_D^-(V_g)$. Il s'agit de caractériser l'ensemble des états qui peuvent être reliés à V_g à droite par une 1–onde suivie d'une discontinuité de contact de vitesse négative. Si $V \in \mathcal{S}_D^-(V_g)$, V est alors relié à droite à un état intermédiaire V^* par une discontinuité de contact de vitesse négative, qui est à son tour relié à V_g à droite par une 1–onde de vitesse négative. Autrement dit V^* appartient à l'ensemble $\mathcal{C}_D^{1,-}(V_g)$ décrit dans la proposition précédente. Comme la vitesse de la discontinuité de contact entre V et V^* , donnée par $\sigma = u = u^*$, est négative, V^* décrit par conséquent la partie de $\mathcal{C}_D^{1,-}(V_g)$ correspondant aux valeurs de $u \leq 0$. On conclut alors que l'ensemble $\mathcal{S}_D^-(V_g)$ est décrit par

$$\mathcal{S}_D^-(V_g) = \{V = (\alpha, \rho, u, p) \in \Omega_{V,R} : V \in \mathcal{D}^{(2,3),R}(V^*), V^* \in \mathcal{C}_D^{1,-}(V_g), u \leq 0\}.$$

D'après la proposition 7.4, on peut caractériser cet ensemble comme suit :

Proposition 7.16.

Soit $V_g \in \Omega_{V,R}$. Alors l'ensemble $\mathcal{S}_D^-(V_g)$ est donné par

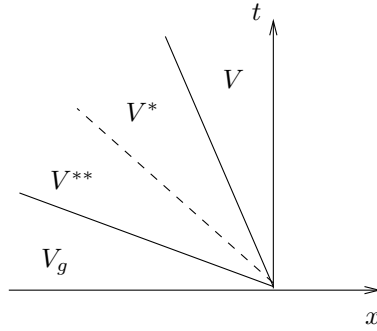
$$\begin{aligned} \mathcal{S}_D^-(V_g) &= \{(\alpha, \rho, u, p) : (u, p) \in \mathcal{P}_D^{1,-}(V_g), u \leq 0, \alpha \in [0, 1], \rho > 0\} \\ &= \{(\alpha, \rho, u, p) : u = u_g - \Phi_{R,g}(p), p \geq p_{min}^1(V_g), u \leq 0, \alpha \in [0, 1], \rho > 0\}. \end{aligned}$$

Remarque 7.6.

L'ensemble $\mathcal{S}_D^-(V_g)$ décrit, dans l'hyperespace (α, ρ, u, p) une hypersurface dont la projection dans l'espace (ρ, u, p) est la surface parallèle à l'axe ρ , dont la base dans le plan (u, p) est la partie de la courbe $\mathcal{P}_R^{1,-}(V_g)$ correspondant aux valeurs de $u \leq 0$.

L'ensemble $\mathcal{V}_D^-(V_g)$

Nous nous intéressons désormais à l'ensemble $\mathcal{V}_D^-(V_g)$. Si $V \in \mathcal{V}_D^-(V_g)$, V est cette fois-ci relié à droite par une 4-onde de vitesse négative à un état intermédiaire V^* , qui est à son tour relié à droite par une discontinuité de contact de vitesse négative à un état V^{**} , qui est finalement relié à droite à V_g par une 1-onde de vitesse négative.



Autrement dit, l'état V^* appartient à l'ensemble $\mathcal{S}_D^-(V_g)$ décrit par la proposition précédente et les valeurs possibles pour V sont alors tous les états que l'on peut relier à droite à un tel état V^* par une 4-onde de vitesse négative. En notant $\mathcal{C}_D^{4,-}(V^*)$ la courbe de tous ces états, on conclut que $\mathcal{V}_D^-(V_g)$ n'est autre que l'ensemble

$$\mathcal{V}_D^-(V_g) = \{(\alpha, \rho, u, p) \in \Omega_{V,R} : V \in \mathcal{C}_D^{4,-}(V^*), V^* \in \mathcal{S}_D^-(V_g)\}.$$

Notre but est de donner une caractérisation de cet ensemble à l'aide de contraintes explicites sur ses composantes. Dû à la complexité de l'analyse, nous allons démontrer une série de lemmes avant d'obtenir le résultat final. Nous commençons par décrire l'ensemble des états V que l'on peut relier à droite à un état V^* fixé par une 4-onde de vitesse négative. Cet ensemble décrit une courbe dans l'hyperespace qui est une partie de la courbe de 4-onde $\mathcal{C}_D^{4,R}(V^*)$. Nous étudions ensuite l'ensemble engendré par cette courbe lorsque V^* varie dans $\mathcal{S}_D^-(V_g)$.

Soit alors $V^* = (\alpha^*, \rho^*, u^*, p^*)$ dans l'ensemble $\mathcal{S}_D^-(V_g)$. D'après les propositions 7.13 et 7.14 (cf. aussi la figure 7.3, en remplaçant p_c^3 , p_{det}^3 et $\sqrt{\frac{p_0 \tau_0^2}{\tau_{0max} - \tau_0}}$ respectivement par p_c^4 , p_{det}^4 et $c^* \sqrt{\frac{\gamma^* - 1}{2\gamma^*}}$), en faisant V^* jouer le rôle de V_0 , la courbe $\mathcal{C}_D^{4,-}(V_g)$ peut se caractériser comme suit :

Lemme 7.5.

Soit $V^* \in \Omega_{V,R}$. L'ensemble $\mathcal{C}_D^{4,-}(V^*)$ est décrit par :

1. Si $u^* \leq -c^*$, les états $V(p) \in \mathcal{C}_D^{4,R}(V^*)$ tels que $0 < p \leq p_{det}^4(V^*)$;
2. Si $-c^* < u^* \leq -c^* \sqrt{\frac{\gamma^* - 1}{2\gamma^*}}$, les états $V(p) \in \mathcal{C}_D^{4,R}(V^*)$ tels que $0 < p \leq p_c^4(V^*)$.

Si $u^* > -c^* \sqrt{\frac{\gamma^*-1}{2\gamma^*}}$, il n'est pas possible de relier un état V à droite à V^* par une 4-onde de vitesse négative.

La démonstration est conséquence immédiate des propositions 7.13 et 7.14.

On remarque que, dans 1. du lemme précédent, la partie admissible de la courbe $\mathcal{C}_D^{4,R}(V^*)$ se compose de toute sa branche choc, correspondant aux états $V = V(p)$ tels que $p < p^*$, et d'une partie de sa branche détente, correspondant aux états $V = V(p)$ tels que $p^* < p \leq p_{det}^4(V^*)$. Dans 2., la partie admissible de la courbe correspond uniquement à une partie de la branche choc. D'autre part, si $u^* > -c^* \sqrt{\frac{\gamma^*-1}{2\gamma^*}}$, l'ensemble $\mathcal{C}_D^{4,-}(V^*)$ est un ensemble vide.

On note $u = u^* - \Psi_{R,*}(p)$ l'équation de la projection de la courbe de 4-onde $\mathcal{C}_D^{4,R}(V^*)$ dans le plan (u, p) . Si l'on définit

$$p_{max}^4 = p_{max}^4(V^*) = \begin{cases} p_{det}^4(V^*), & u^* \leq -c^*, \\ p_c^4(V^*), & -c^* < u^* \leq -c^* \sqrt{\frac{\gamma^*-1}{2\gamma^*}}, \end{cases}$$

on conclut de la proposition précédente et de la caractérisation des courbes de 4-onde pour le système HRM donnée par les propositions 7.5 et 7.6, que la projection dans le plan (u, p) de l'ensemble $\mathcal{C}_D^{4,-}(V^*)$ est décrite par l'équation $u = u^* - \Psi_{R,*}(p)$, $0 < p < p_{max}^4(V^*)$, pour $u^* \leq -c^* \sqrt{\frac{\gamma^*-1}{2\gamma^*}}$.

Pour décrire l'ensemble $\mathcal{V}_D^-(V_g)$, il faut maintenant étudier l'ensemble engendré par la courbe $\mathcal{C}_D^{4,-}(V^*)$, lorsque V^* varie dans $\mathcal{S}_D^-(V_g)$. D'après le lemme précédent, si V est relié à V^* à droite par une 4-onde de vitesse négative, u^* doit vérifier nécessairement $u^* \leq -c^* \sqrt{\frac{\gamma^*-1}{2\gamma^*}}$. Or, u^* étant négatif, on vérifie que

$$\begin{aligned} u^* \leq -c^* \sqrt{\frac{\gamma^*-1}{2\gamma^*}} &\iff u^* \leq -\sqrt{\frac{\gamma^* p^* \gamma^* - 1}{\rho^* 2\gamma^*}} \\ &\iff u^{*2} \geq \frac{p^*(\gamma^* - 1)}{2\rho^*} \\ &\iff \rho^* \geq \frac{p^*(\gamma^* - 1)}{2u^{*2}} := \rho_{min}^*(\alpha^*, u^*, p^*) \end{aligned}$$

et donc ρ^* n'est plus arbitraire : pour chaque u^* , ρ^* est seulement autorisé à prendre des valeurs supérieures ou égales à $\rho_{min}^*(\alpha^*, u^*, p^*)$. On a encore

$$\begin{aligned} u^* \leq -c^* &\iff u^* \leq -\sqrt{\frac{\gamma^* p^*}{\rho^*}} \iff u^{*2} \geq \frac{\gamma^* p^*}{\rho^*} \\ &\iff \rho^* \geq \frac{\gamma^* p^*}{u^{*2}}. \end{aligned}$$

Nous allons décrire l'ensemble engendré par la courbe $\mathcal{C}_D^{4,-}(V^*)$, lorsque V^* varie dans l'ensemble $\mathcal{S}_D^-(V_g)$, en trois étapes. D'abord nous étudions, à (α^*, u^*, p^*) fixé, l'ensemble engendré dans l'hyperespace par la courbe $\mathcal{C}_D^{4,-}(V^*)$, lorsque ρ^* varie entre $\rho_{min}^*(\alpha^*, u^*, p^*)$ et $+\infty$. Puis nous décrivons l'hypersurface engendrée par cet ensemble

lorsque (u^*, p^*) parcourt la partie admissible de la courbe $\mathcal{P}_D^{1,-}(V_g)$, c'est-à-dire la partie correspondant aux valeurs de $u \leq 0$. Finalement nous décrivons l'hypervolume engendré par cette hypersurface lorsque α^* varie entre 0 et 1.

Nous commençons par caractériser l'ensemble engendré par la courbe $\mathcal{C}_D^{4,-}(V^*)$, lorsque ρ^* varie entre $\rho_{min}^*(\alpha^*, u^*, p^*)$ et $+\infty$. On pose, pour (α^*, u^*, p^*) fixé,

$$h^c(\alpha^*, u^*, p^*; p) = u^* \frac{\mu_*^2 p + p^*}{p + \mu_*^2 p^*} = u^* \rho^* \mathfrak{h}^*(\alpha; p)$$

et

$$h^d(\alpha^*, u^*, p^*; p) = u^* \frac{(\gamma^* - 1)p^{\frac{\gamma^*-1}{2\gamma^*}}}{(\gamma^* + 1)p^{\frac{\gamma^*-1}{2\gamma^*}} - 2p^* \frac{\gamma^*-1}{2\gamma^*}}.$$

Nous allons montrer le lemme suivant :

Lemme 7.6.

Soit (α^, u^*, p^*) fixé. Alors, lorsque ρ^* parcourt l'intervalle $[\rho_{min}^*(\alpha^*, u^*, p^*), +\infty[$, la courbe $\mathcal{C}_D^{4,-}(V^*)$ décrit l'ensemble de l'hyperespace défini par $\alpha = \alpha^*$ et par la surface*

$$\begin{aligned} \rho &= \bar{\rho}(u, p; \alpha^*, u^*, p^*) \\ &= \begin{cases} \frac{1-\mu_*^2}{(u-u^*)^2} \frac{(p^*-p)^2}{p^* + \mu_*^2 p}, & h^c(\alpha^*, u^*, p^*; p) \leq u \leq u^*, \quad 0 < p \leq p^*, \\ \frac{4\gamma^*}{(\gamma^*-1)^2} p^{\frac{1}{\gamma^*}} \frac{\left(p^{\frac{\gamma^*-1}{2\gamma^*}} - p^* \frac{\gamma^*-1}{2\gamma^*}\right)^2}{(u-u^*)^2}, & u^* \leq u \leq h^d(\alpha^*, u^*, p^*; p), \quad p \geq p^*. \end{cases} \end{aligned} \quad (7.31)$$

Démonstration.

La preuve est technique. Pour ne pas alourdir le texte, nous proposons la démonstration de ce lemme en annexe A.1. \square

On passe maintenant à la description du volume engendré dans l'hyperplan $\alpha = \alpha^*$ par les surfaces (7.31), lorsque, à α^* fixé, (u^*, p^*) décrit la partie de la courbe $\mathcal{P}_D^{1,-}(V_g)$ correspondant aux valeurs de $u \leq 0$, c'est-à-dire la partie de la courbe

$$u^* = u_g - \Phi_{R,g}(p^*) = u_g - \begin{cases} \sqrt{(p^* - p_g)(\tau_g - \mathfrak{h}_g(\alpha_g; p^*))}, & p^* \geq p_g, \\ \int_{p_g}^{p^*} \frac{1}{(\rho c)(\alpha_g, q^*, s_g)} dq^*, & p^* \leq p_g, \end{cases} \quad (7.32)$$

correspondant à $u^* \leq 0$, $p^* \geq p_{min}^1(V_g)$. Pour α^* fixé, et lorsque (u^*, p^*) varie, (7.31) définit une famille à un paramètre de surfaces, avec pour paramètre u^* (ou p^*). La projection de ces surfaces dans le plan (u, p) correspond à la région, que l'on va noter $D(\alpha^*, u^*, p^*)$, comprise entre la demi-droite $u = u^*$, $p > 0$, et la courbe

$$u = \bar{u}(p) = \begin{cases} u^* \frac{\mu_*^2 p + p^*}{p + \mu_*^2 p^*}, & 0 < p \leq p^*, \\ u^* \frac{(\gamma^*-1)p^{\frac{\gamma^*-1}{2\gamma^*}}}{(\gamma^*+1)p^{\frac{\gamma^*-1}{2\gamma^*}} - 2p^* \frac{\gamma^*-1}{2\gamma^*}}, & p \geq p^* \end{cases} \quad (7.33)$$

(cf. figure A.2 dans l'annexe A.1). Il est clair que (7.33) définit également une famille de courbes paramétrés par u^* (ou par p^*).

Pour décrire le volume cherché, nous analysons d'abord l'ensemble engendré dans le plan (u, p) par le domaine $D(\alpha^*, u^*, p^*)$, lorsque (u^*, p^*) parcourt la partie admissible de la courbe $\mathcal{P}_D^{1,-}(V_g)$. Cet ensemble correspond à la projection dans le plan (u, p) du volume cherché. Nous caractérisons ensuite ce volume, en analysant la variation des surfaces (7.31), lorsque (u^*, p^*) varie. On obtiendra ainsi une hypersurface, correspondant à ce volume contenu dans l'hyperplan $\alpha = \alpha^*$. Le résultat que l'on va établir est le suivant :

Lemme 7.7.

Soit $\alpha^* \in [0, 1]$ fixé. Alors, lorsque (u^*, p^*) parcourt la partie de la courbe $\mathcal{P}_D^{1,-}(V_g)$ correspondant aux valeurs de $u \leq 0$, la surface $\bar{\rho}(u, p; \alpha^*, u^*, p^*)$ donnée par le lemme 7.6 décrit un volume de l'hyperplan $\alpha = \alpha^*$ défini par

$$\rho \geq \tilde{\rho}(\alpha^*; u, p) = \begin{cases} \frac{\mu_*^2 p + p^*}{u^2(1-\mu_*^2)}, & u < u_g - \Phi_{R,g}(p), \\ \frac{\gamma^* p}{u^2}, & u > u_g - \Phi_{R,g}(p), \end{cases}$$

où $\underline{p}^* = \underline{p}^*(u, p)$ est donné par

$$\underline{u}^* = u_g - \Phi_{R,g}(\underline{p}^*), \quad u = \underline{u}^* \frac{\mu_*^2 p + p^*}{p + \mu_*^2 \underline{p}^*},$$

et (u, p) appartient au quart de plan

$$u \leq u_{max}, \quad p > 0,$$

avec

$$u_{max} = \begin{cases} \mu_*^2 \left(u_g + \frac{2}{\gamma_g - 1} c_g \right), & \text{si } u_g \leq -\frac{2}{\gamma_g - 1} c_g, \\ 0, & \text{si } u_g > -\frac{2}{\gamma_g - 1} c_g. \end{cases}$$

Démonstration.

La preuve de ce lemme est à nouveau technique et encore une fois nous la proposons en annexe A.2. \square

On conclut ainsi du lemme précédent que, à α^* fixé, lorsque (u^*, p^*) varie dans la partie admissible de la courbe $\mathcal{P}_D^{1,-}(V_g)$, l'ensemble

$$\alpha = \alpha^*, \quad \rho = \bar{\rho}(u, p; \alpha^*, u^*, p^*)$$

donné par le lemme 7.6 engendre une hypersurface définie par

$$\alpha = \alpha^*, \quad \rho \geq \tilde{\rho}(\alpha^*; u, p). \quad (7.34)$$

Maintenant, lorsque α^* varie, (7.34) définit une famille à un paramètre d'hypersurfaces. Pour caractériser l'ensemble $\mathcal{V}_R^-(V_d)$, il suffit alors de faire varier α^* dans l'intervalle $[0, 1]$ et de décrire l'hypervolume engendré par cette famille d'hypersurfaces.

Proposition 7.17.

Lorsque α^* varie dans l'intervalle $[0, 1]$, l'hypersurface donnée par le lemme 7.7 se déplace de manière monotone dans l'hyperespace, dans le sens des valeurs de ρ croissantes, engendrant ainsi un hypervolume qui correspond à l'ensemble $\mathcal{V}_R^-(V_g)$.

Démonstration.

La surface

$$\tilde{\rho}_{det}(\alpha^*; u, p) := \frac{\gamma^* p}{u^2}$$

croît clairement avec γ^* . Puisque

$$\frac{\partial \gamma^*}{\partial \alpha^*} = \frac{\partial}{\partial \alpha^*} (\gamma_1 \alpha^* + \gamma_2 (1 - \alpha^*)) = (\gamma_1 - \gamma_2) > 0,$$

(on a supposé $\gamma_1 > \gamma_2$), $\tilde{\rho}_{det}$ croît aussi avec α^* . Nous analysons ensuite comment varie la surface

$$\tilde{\rho}_{ch}(\alpha^*; u, p) := \frac{\mu_*^2 p + \underline{p}^*}{u^2 (1 - \mu_*^2)}$$

en fonction de α^* , ou, ce qui est suffisant, en fonction de μ_*^2 , vu que

$$\frac{\partial \mu_*^2}{\partial \gamma^*} = \frac{\partial}{\partial \gamma^*} \left(\frac{\gamma^* - 1}{\gamma^* + 1} \right) = \frac{2}{(\gamma^* + 1)^2} > 0,$$

et donc aussi $\frac{\partial \mu_*^2}{\partial \alpha^*} > 0$. Or, d'un côté, comme $\underline{u}^* = u_g - \Phi_{R,g}(\underline{p}^*)$, on a

$$\frac{\partial \underline{u}^*}{\partial \mu_*^2} = -\Phi'_{R,g}(\underline{p}^*) \frac{\partial \underline{p}^*}{\partial \mu_*^2},$$

où $\Phi'_{R,g}(\underline{p}^*) > 0$. D'un autre côté,

$$u = \underline{u}^* \frac{\mu_*^2 p + \underline{p}^*}{p + \mu_*^2 \underline{p}^*} \implies \underline{u}^* = u \frac{p + \mu_*^2 \underline{p}^*}{\mu_*^2 p + \underline{p}^*}$$

et donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{u}^*}{\partial \mu_*^2} &= u \frac{\left(\underline{p}^* + \mu_*^2 \frac{\partial \underline{p}^*}{\partial \mu_*^2} \right) (\mu_*^2 p + \underline{p}^*) - \left(p + \frac{\partial p^*}{\partial \mu_*^2} \right) (p + \mu_*^2 \underline{p}^*)}{(\mu_*^2 p + \underline{p}^*)^2} \\ &= u \frac{p^{*2} - p^2 + (\mu_*^2 - 1)(\mu_*^2 + 1)p \frac{\partial p^*}{\partial \mu_*^2}}{(\mu_*^2 p + \underline{p}^*)^2}, \end{aligned}$$

de sorte que

$$-\Phi'_{R,g}(\underline{p}^*) \frac{\partial \underline{p}^*}{\partial \mu_*^2} = u \frac{p^{*2} - p^2 + (\mu_*^2 - 1)(\mu_*^2 + 1)p \frac{\partial p^*}{\partial \mu_*^2}}{(\mu_*^2 p + \underline{p}^*)^2}.$$

On en déduit

$$\frac{\partial \underline{p}^*}{\partial \mu_*^2} (\mu_*^2 p + \underline{p}^*)^2 \left(-\Phi'_{R,g}(\underline{p}^*) - u p (\mu_*^2 - 1)(\mu_*^2 + 1) \right) = u (p^{*2} - p^2).$$

Comme $\Phi'_{R,g} > 0$, $u < 0$ et $\underline{p}^* < p^*$, on obtient

$$\frac{\partial \underline{p}^*}{\partial \mu_*^2} > 0.$$

Il reste seulement à étudier la variation par rapport à μ_*^2 de $\tilde{\rho}_{ch}(\alpha^*; u, p)$. Or

$$\frac{\partial \tilde{\rho}_{ch}}{\partial \mu_*^2} = \frac{\left(p + \frac{\partial p^*}{\partial \mu_*^2}\right)(u^2(1 - \mu_*^2)) + u^2(\mu_*^2 p + p^*)}{u^4(1 - \mu_*^2)^2} > 0.$$

On en déduit que la surface $\tilde{\rho}_{ch}(\alpha^*; u, p)$ croît avec μ_*^2 et donc avec α^* et on conclut alors le résultat de la proposition. \square

7.4.2 L'ensemble $\mathcal{O}_L(V_d)$

On s'intéresse désormais à l'ensemble $\mathcal{O}_L(V_d)$, qui est défini par (7.27) :

$$\mathcal{O}_L(V_d) = \{Z_L(0^-; V, V_d) : V \in \Omega_{V,L}\}$$

Cet ensemble est l'ensembles des traces en $\frac{x}{t} = 0^-$ des solutions de tous les problèmes de Riemann pour le système d'Euler dont la donnée initiale est égale à V_d pour $x > 0$. Une telle solution est composée de quatre états constants séparés par une 1-onde, par une discontinuité de contact et par une 3-onde (une ou plus de ces ondes pouvant éventuellement être d'amplitude nulle).

On introduit ici des notations analogues à celles utilisées au paragraphe précédent.

On pose

$\mathcal{C}_G^{3,+}(V_d)$ la partie de la courbe de 3-onde $\mathcal{C}_G^{3,L}(V_d)$ correspondant à des ondes de vitesse positive, c'est-à-dire l'ensemble des états $V \in \Omega_{V,L}$ que l'on peut relier à V_d à gauche par une 3-onde de vitesse positive ;

$\mathcal{S}_G^+(V_d)$ l'ensemble des états $V \in \Omega_{V,L}$ que l'on peut relier à V_d à gauche par une discontinuité de contact suivie d'une 3-onde de vitesse positive ;

$\mathcal{V}_G^+(V_d)$ l'ensemble des états $V \in \Omega_{V,L}$ que l'on peut relier à gauche à V_d par une 1-onde suivie d'une discontinuité de contact et d'une 3-onde, toutes de vitesses positives.

Alors, en raisonnant comme l'on a fait pour l'ensemble $\mathcal{O}_R(V_g)$, on conclut que l'ensemble $\mathcal{O}_L(V_d)$ admet la caractérisation suivante :

Théorème 7.2.

Soit $V_d \in \mathcal{V}$. Alors

$$\mathcal{O}_L(V_d) = \{V_d\} \cup \mathcal{C}_G^{3,+}(V_d) \cup \mathcal{S}_G^+(V_d) \cup \mathcal{V}_G^+(V_d).$$

Il s'agit maintenant de décrire les ensembles $\mathcal{C}_G^{3,+}(V_d)$, $\mathcal{S}_G^+(V_d)$ et $\mathcal{V}_G^+(V_d)$ du théorème précédent. Pour cela, nous nous servirons à nouveau de l'étude faite sur le signe de la vitesse des ondes intervenant en dynamique des gaz. L'analyse est la même que pour le système HRM.

L'ensemble $\mathcal{C}_G^{3,+}(V_d)$

L'ensemble $\mathcal{C}_G^{3,+}(V_d)$ est l'ensemble des états que l'on peut relier à gauche à V_d par une 3-onde admissible pour le système d'Euler de vitesse positive. Les propositions 7.9 et 7.10 (cf. aussi la figure 7.4) permettent de conclure le résultat suivant :

Proposition 7.18.

Soit $V_d \in \Omega_{V,L}$. L'ensemble $\mathcal{C}_G^{3,+}(V_d)$ est décrit par :

1. Si $u_d \leq -c_d$, les états $V(p) \in \mathcal{C}_G^{3,L}(V_d)$ tels que $p \geq \hat{p}_c^3(V_d)$;
2. Si $-c_d \leq u_d < -\Phi_{L,d}(0) = \int_0^{p_d} \frac{1}{\rho c}$, les états $V(p) \in \mathcal{C}_G^{3,L}(V_d)$ tels que $p \geq \hat{p}_{det}^3(V_d)$;
3. Si $u_d \geq -\Phi_{L,d}(0)$, tout l'ensemble $\mathcal{C}_G^{3,L}(V_d)$.

Si on pose

$$p_{min}^3 = p_{min}^3(V_d) = \begin{cases} \hat{p}_c^3(V_d), & u_d \leq -c_d, \\ \hat{p}_{det}^3(V_d), & -c_d \leq u_d < \int_0^{p_d} \frac{1}{\rho c}, \\ 0, & u_d \geq \int_0^{p_d} \frac{1}{\rho c} \end{cases}$$

alors on conclut de la proposition précédente et de la caractérisation de $\mathcal{C}_G^{3,L}(V_d)$ donnée par les propositions 7.2 et 7.3 que l'ensemble $\mathcal{C}_G^{3,+}(V_d)$ correspond aux états $(\rho, u, p) \in \Omega_{V,L}$ tels que $u = u_d + \Phi_{L,d}(p)$, $\rho = \varphi_{L,d}(p)$ et $p \geq p_{min}^3(V_d)$.

L'ensemble $\mathcal{S}_G^+(V_d)$

L'ensemble $\mathcal{S}_G^+(V_d)$ est maintenant l'ensemble des états qui peuvent être reliés à V_d à gauche par une discontinuité de contact suivie d'une 3-onde de vitesse positive, donc l'ensemble des états qui peuvent être reliés à gauche par une discontinuité de contact de vitesse positive à un état intermédiaire V^* , qui, à son tour, peut se relier à gauche à V_d par une 3-onde de vitesse positive. Cet état intermédiaire V^* appartient donc à l'ensemble $\mathcal{C}_G^{3,+}(V_d)$ décrit ci-dessus et, comme la vitesse de la discontinuité de contact entre V et V^* est positive, V^* décrit la partie de $\mathcal{C}_G^{3,+}(V_d)$ correspondant aux valeurs de $u \geq 0$. L'ensemble $\mathcal{S}_G^+(V_d)$ est ainsi caractérisé par :

$$\mathcal{S}_G^+(V_d) = \{V = (\rho, u, p) : V \in \mathcal{D}^{2,L}(V^*), V^* \in \mathcal{C}_G^{3,+}(V_d)\}.$$

D'après la proposition 7.1, cet ensemble peut se caractériser par

Proposition 7.19.

Soit $V_d \in \Omega_{V,L}$. Alors l'ensemble $\mathcal{S}_G^+(V_d)$ est donné par

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_G^+(V_d) &= \{(\rho, u, p) : (u, p) \in \mathcal{P}_G^{3,+}(V_d), u \geq 0, \rho > 0\} \\ &= \{(\rho, u, p) : u = u_d + \Phi_{L,d}(p), p \geq p_{min}^3(V_d), u \geq 0, \rho > 0\}. \end{aligned}$$

L'ensemble $\mathcal{V}_G^+(V_d)$

L'ensemble $\mathcal{V}_G^+(V_d)$ décrit tous les états qui peuvent être reliés à V_d à gauche par une 1-onde suivie d'une discontinuité de contact suivie d'une 3-onde, toutes de vitesses positives. Si $V \in \mathcal{V}_G^+(V_d)$, alors V est relié à gauche à un état intermédiaire V^* par une 1-onde de vitesse positive, qui est à son tour relié à gauche à V_d par une discontinuité de contact suivie d'une 3-onde de vitesses positives, de sorte que V^* appartient à l'ensemble $\mathcal{S}_G^+(V_d)$ décrit à la proposition précédente.

En notant $\mathcal{C}_G^{1,+}(V^*)$ l'ensemble des états que l'on peut relier à gauche à V^* par une 1-onde de vitesse positive, l'ensemble $\mathcal{V}_G^+(V_d)$ correspond à l'ensemble engendré par la courbe $\mathcal{C}_G^{1,+}(V^*)$ lorsque V^* varie dans $\mathcal{S}_G^+(V_d)$:

$$\mathcal{V}_G^+(V_d) = \{V = (\rho, u, p) \in \Omega_{V,L} : V \in \mathcal{C}_G^{1,+}(V^*), V^* \in \mathcal{S}_G^+(V_d)\}.$$

Or, d'une part, on conclut immédiatement des propositions 7.7 et 7.8 (cf. aussi la figure 7.2) que l'ensemble $\mathcal{C}_G^{1,+}(V^*)$ est décrit par les états $V = (\rho, u, p)$ tels que

$$u = u^* + \Psi_{L,*}(p), \quad \rho = \psi_{L,*}(p),$$

avec

$$p \leq p_{max}^1(V^*) = \begin{cases} \hat{p}_c^1(V^*), & \sqrt{\frac{p^* \tau^{*2}}{\tau_{max}^* - \tau^*}} < u^* < c^*, \\ \hat{p}_{det}^1, & u^* \geq c^*, \end{cases}$$

pour $u^* > \sqrt{\frac{p^* \tau^{*2}}{\tau_{max}^* - \tau^*}}$ (et est l'ensemble vide si $u^* \leq \sqrt{\frac{p^* \tau^{*2}}{\tau_{max}^* - \tau^*}}$). D'autre part, vue la caractérisation de l'ensemble $\mathcal{S}_G^+(V_d)$ donnée par la proposition précédente, on conclut alors que

$$\mathcal{V}_G^+(V_d) = \{V = (\rho, u, p) \in \Omega_{V,L} : u = u^* + \Psi_{L,*}(p), \rho = \psi_{L,*}(p), p \leq p_{max}^1(V^*), \\ u^* = u_d + \Phi_{L,d}(p^*), p \geq p_{min}^3(V_d), u^* \geq 0\}.$$

On remarque dans le lemme suivant une propriété importante de cet ensemble.

Lemme 7.8.

Soit $V_d \in \Omega_{V,L}$. On a

$$\mathcal{V}_G^+(V_d) \subseteq \{(\rho, u, p) : u \geq 0\}.$$

Démonstration.

L'ensemble $\mathcal{V}_G^+(V_d)$ est constitué des états $V(p) \in \mathcal{C}_G^{1,+}(V^*)$ tels que $p \leq p_{max}^1(V^*)$ et donc tels que $u \geq u_{max}^1(V^*)$, puisque la courbe $\mathcal{P}_G^{1,+}(V^*)$ définit u comme une fonction décroissante de p , $u = u^* + \Psi_{L,*}(p)$ (cf. figure 7.2). Or si $p_{max}^1(V^*) = \hat{p}_c^1(V^*)$, on a $\hat{p}_c^1(V^*) \leq p^*$, donc $\hat{u}_c^1(V^*) \geq u^*$. Comme $u^* \geq 0$, on obtient $\hat{u}_c^1(V^*) \geq 0$. Si $p_{max}^1(V^*) = \hat{p}_{det}^1(V^*)$, on a, par définition de $\hat{p}_{det}^1(V^*)$, $\hat{u}_{det}^1(V^*) = \hat{c}_{det}^1(V^*) > 0$. On obtient ainsi, dans les deux cas, $u_{max}^1(V^*) \geq 0$ et donc, pour $V \in \mathcal{V}_G^+(V_d)$, on a $u \geq u_{max}^1(V^*) \geq 0$. \square

Comme l'analyse dans le cas générale est très complexe, nous allons donner une description géométrique de l'ensemble $\mathcal{V}_G^+(V_d)$, comme l'on a fait pour l'ensemble $\mathcal{V}_D^-(V_g)$, uniquement dans le cas d'une loi d'état du type gaz parfait, c'est-à-dire dans le cas où la pression p est définie par (6.3). Dans ce cas, l'analyse est encore une fois analogue à celle faite pour l'ensemble $\mathcal{V}_D^-(V_g)$ et on obtient, en suivant les mêmes lignes de la preuve dans ce cas, la caractérisation pour l'ensemble $\mathcal{V}_G^+(V_d)$ donnée par la proposition suivante :

Proposition 7.20.

L'ensemble $\mathcal{V}_G^+(V_d)$ correspond au volume de l'espace situé au dessus de la surface

$$\rho \geq \bar{\rho}(u, p) = \begin{cases} \frac{\mu^2 p + \underline{p}}{u^2(1-\mu^2)}, & u > u_d + \Phi_{L,d}(p), \\ \frac{\underline{p}}{u^2}, & u < u_d + \Phi_{L,d}(p), \end{cases}$$

avec $\underline{p} = \underline{p}(u, p)$ défini par

$$\underline{u} = u_d + \Phi_{L,d}(\underline{p}), \quad u = \frac{\mu^2 p + \underline{p}}{p + \mu^2 \underline{p}},$$

où (u, p) appartient au quart de plan

$$u \geq u_{min}, \quad p > 0,$$

avec

$$u_{min} = \begin{cases} 0, & \text{si } u_d \leq \frac{2}{\gamma-1}c_d, \\ \mu^2 \left(u_d - \frac{2}{\gamma-1}c_d \right), & \text{si } u_d \geq \frac{2}{\gamma-1}c_d. \end{cases}$$

7.4.3 Les contraintes de couplage

Nous sommes maintenant en mesure de décrire les conditions de couplage (7.3)

$$\begin{aligned} (\rho, u, p)(0^-, t) &\in \mathcal{O}_L((\rho, u, p)(0^+, t)), \\ (\alpha, \rho, u, p)(0^+, t) &\in \mathcal{O}_R((\alpha_{eq}(\rho), \rho, u, p)(0^-, t)), \quad \forall t > 0. \end{aligned}$$

Soit $t > 0$. On pose $V_d = (\alpha, \rho, u, p)(0^+, t)$, $V_g = (\rho, u, p)(0^-, t)$, $\alpha_g = \alpha_{eq}(\rho(0^-, t))$ et $\bar{V}_d = (\rho_d, u_d, p_d)$, de sorte que $(\alpha_g, V_g) = \Theta_R^L(V_g)$ et $\bar{V}_d = \Theta_L^R(V_d)$.

Les contraintes de couplage s'écrivent alors

$$V_g \in \mathcal{O}_L(\bar{V}_d), \quad V_d \in \mathcal{O}_R((\alpha_g, V_g)),$$

soit, d'après la caractérisation des ensembles \mathcal{O}_L et \mathcal{O}_R que l'on a faite au paragraphe précédent,

$$V_g \in \{\bar{V}_d\} \cup \mathcal{C}_G^{3,+}(\bar{V}_d) \cup \mathcal{S}_G^+(\bar{V}_d) \cup \mathcal{V}_G^+(\bar{V}_d) \quad (7.35)$$

et

$$V_d \in \{(\alpha_g, V_g)\} \cup \mathcal{C}_D^{1,-}((\alpha_g, V_g)) \cup \mathcal{S}_D^-((\alpha_g, V_g)) \cup \mathcal{V}_D^-((\alpha_g, V_g)). \quad (7.36)$$

La caractérisation que l'on a fait des ensembles intervenant dans les conditions (7.35) et (7.36) permet de montrer le résultat suivant :

Théorème 7.3.

Les contraintes de couplage (7.3) sont satisfaites si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée

- (i) $V_g = \bar{V}_d$ et $\alpha_g = \alpha_d$;
- (ii) $V_g = \bar{V}_d$, $u_g = u_d \leq 0$;
- (iii) $u_g = u_d = 0$, $p_g = p_d$;
- (iv) $u_g = u_d + \Phi_{L,d}(p_g)$, $\rho_g = \varphi_{L,d}(p_g)$, $p_g \geq p_{min}^3(\bar{V}_d)$ et $V_d \in \mathcal{V}_D^-((\alpha_g, V_g))$;
- (v) $u_g = u_d + \Phi_{L,d}(p_g)$, $p_g \geq p_{min}^3(\bar{V}_d)$, $u_g \geq 0$ et $V_d \in \mathcal{V}_D^-((\alpha_g, V_g))$;
- (vi) $u_d = u_g - \Phi_{R,g}(p_d)$, $\rho_d = \varphi_{R,g}(p_d)$, $p_d \geq p_{min}^1((\alpha_g, V_g))$ et $V_g \in \mathcal{V}_G^+(\bar{V}_d)$;
- (vii) $u_d = u_g - \Phi_{R,g}(p_d)$, $p_d \geq p_{min}^1((\alpha_g, V_g))$, $u_d \leq 0$ et $V_g \in \mathcal{V}_G^+(\bar{V}_d)$;
- (viii) $V_g \in \mathcal{V}_G^+(\bar{V}_d)$ et $V_d \in \mathcal{V}_D^-((\alpha_g, V_g))$.

Démonstration.

On traite d'abord la condition suffisante. Si l'une des conditions (i)-(viii) est vérifiée, les conditions (7.35) et (7.36) sont elles aussi vérifiées :

La condition triviale (i) correspond au cas d'une solution du problème couplé continue à l'interface. Elle implique $V_g = \bar{V}_d$ et $(\alpha_g, V_g) = V_d$.

La condition (ii), qui correspond au cas d'une discontinuité de contact avec α arbitraire

à l'interface, implique $V_d \in \mathcal{S}_D^-((\alpha_g, V_g))$, puisque, par définition de cet ensemble, pour tout $\alpha \in [0, 1]$, on a $(\alpha, \bar{V}_d) \in \mathcal{S}_D^-((\alpha_g, V_g)) = \mathcal{S}_D^-((\alpha_g, \bar{V}_d))$, pourvu que $u_d = u_g \leq 0$. La condition (iii), qui correspond au cas d'une discontinuité de contact avec α et ρ arbitraires à l'interface, implique, par définition des ensembles $\mathcal{S}_D^-((\alpha_g, V_g))$ et $\mathcal{S}_G^+(\bar{V}_d)$, que $V_g \in \mathcal{S}_G^+(\bar{V}_d)$ et $V_d \in \mathcal{S}_D^-((\alpha_g, V_g))$. Les conditions (iv) et (v) impliquent respectivement, par définition des ensembles $\mathcal{C}_G^{3,+}(\bar{V}_d)$ et $\mathcal{S}_G^+(\bar{V}_d)$,

$$V_g \in \mathcal{C}_G^{3,+}(\bar{V}_d), \quad V_d \in \mathcal{V}_D^-((\alpha_g, V_g))$$

et

$$V_g \in \mathcal{S}_G^+(\bar{V}_d), \quad (\alpha_d, V_d) \in \mathcal{V}_D^-((\alpha_g, V_g)).$$

De manière analogue, les conditions (vi) et (vii) impliquent respectivement, par définition des ensembles $\mathcal{C}_D^{1,-}((\alpha_g, V_g))$ et $\mathcal{S}_D^-((\alpha_g, V_g))$,

$$V_g \in \mathcal{V}_G^+(\bar{V}_d), \quad V_d \in \mathcal{C}_D^{1,-}((\alpha_g, V_g))$$

et

$$V_g \in \mathcal{V}_G^+(\bar{V}_d), \quad V_d \in \mathcal{S}_D^-((\alpha_g, V_g)).$$

Finalement la condition (viii) implique clairement les contraintes de couplage (7.35) et (7.36).

Pour prouver la condition nécessaire, on étudie les conditions (7.35) et (7.36). La première possibilité correspond à $V_g = \bar{V}_d$ et $V_d \in \mathcal{O}_R((\alpha_g, V_g))$, c'est-à-dire $(\rho_g, u_g, p_g) = (\rho_d, u_d, p_d)$ et

$$V_d \in \{(\alpha_g, V_g)\} \cup \mathcal{C}_D^{1,-}((\alpha_g, V_g)) \cup \mathcal{S}_D^-((\alpha_g, V_g)) \cup \mathcal{V}_D^-((\alpha_g, V_g)).$$

Dans cette situation, à part le cas trivial $V_d = (\alpha_g, V_g)$, qui entraîne la condition (i), on a à distinguer les deux situations $V_d \in \mathcal{C}_D^{1,-}((\alpha_g, V_g))$ et $V_d \in \mathcal{S}_D^-((\alpha_g, V_g)) \cup \mathcal{V}_D^-((\alpha_g, V_g))$. Dans le premier cas on a $\alpha_d = \alpha_g$, par définition de l'ensemble $\mathcal{C}_D^{1,-}((\alpha_g, V_g))$. On obtient ainsi la condition triviale (i). Si le deuxième cas se vérifie, alors, puisque les ensembles $\mathcal{S}_D^-((\alpha_g, V_g))$ et $\mathcal{V}_D^-((\alpha_g, V_g))$ sont inclus dans l'ensemble $\{(\alpha, \rho, u, p) \in \mathbb{R}^4 : u \leq 0\}$, on a obligatoirement $u_d = u_g \leq 0$. Dans ce cas α_d est arbitraire et on obtient la condition (ii).

La deuxième possibilité correspond à $V_g \in \mathcal{C}_G^{3,+}(\bar{V}_d)$ et $V_d \in \mathcal{O}_R(\alpha_g, V_g)$. À part le cas trivial $V_d = (\alpha_g, V_g)$, on se trouve alors dans l'une des trois situations suivantes :

(1) $V_d \in \mathcal{C}_D^{1,-}((\alpha_g, V_g))$. Dans ce cas on a d'une part $(u_g, p_g) \in \mathcal{P}_G^{3,+}(\bar{V}_d)$ et $(u_d, p_d) \in \mathcal{P}_D^{1,-}(\alpha_g, V_g)$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} u_g = u_d + \Phi_{L,d}(p_g), & \rho_g = \phi_{L,d}(p_g), \\ u_d = u_g - \Phi_{R,g}(p_d), & \rho_d = \phi_{R,g}(p_d). \end{cases}$$

Or les propriétés des fonctions Φ_L et Φ_R énoncées au lemme 7.3 impliquent que les projections des courbes d'onde dans le plan (u, p) s'intersectent en un seul point, d'où

l'on conclut $(u_g, p_g) = (u_d, p_d)$. On a alors $\rho_d = \phi_{R,g}(p_d) = \phi_{R,g}(p_g) = \rho_g$, par définition de la fonction $\phi_{R,g}$. D'autre part, on a à nouveau $\alpha_d = \alpha_g$, par définition de l'ensemble $\mathcal{C}_D^{1,-}(\alpha_g, V_g)$, et on obtient ainsi encore une fois la condition triviale (i).

(2) $V_d \in \mathcal{S}_D^-(\alpha_g, V_g)$. Dans ce cas, α_d est arbitraire et on a obligatoirement $u_d \leq 0$, par définition de l'ensemble $\mathcal{S}_D^-(\alpha_g, V_g)$. On a de plus $(u_d, p_d) = (u_g, p_g)$ puisque à nouveau les deux points appartiennent à l'intersection des deux courbes $\mathcal{P}_D^{1,-}(\alpha_g, V_g)$ et $\mathcal{P}_G^{3,+}(V_d)$. En faisant le même raisonnement que dans le cas précédent, on conclut aussi que $\rho_g = \rho_d$. On obtient ainsi cette fois à nouveau la condition (ii).

(3) $V_d \in \mathcal{V}_D^-(\alpha_g, V_g)$. Par définition de l'ensemble $\mathcal{C}_G^{3,+}(\bar{V}_d)$, ce cas correspond à la condition (iv).

La troisième possibilité correspond à $V_g \in \mathcal{S}_G^+(\bar{V}_d)$ et $V_d \in \mathcal{O}_R((\alpha_g, V_g))$. À nouveau, à part le cas trivial $V_d = (\alpha_g, V_g)$, les trois situations précédents (1), (2) et (3) sont possibles. Le cas (1) est encore analogue à celui ci-dessus et implique la condition (i). Le cas (2) correspond à $V_d \in \mathcal{S}_D^-(\alpha_g, V_g)$. Or

$$\mathcal{S}_D^-(\alpha_g, V_g) \subseteq \{(\alpha, \rho, u, p) \in \mathbb{R}^4 : u \leq 0\},$$

tandis que

$$\mathcal{S}_G^+(\bar{V}_d) \subseteq \{(\rho, u, p) \in \mathbb{R}^3 : u \geq 0\}.$$

Ainsi,

$$\begin{cases} V_g \in \mathcal{S}_G^+(\bar{V}_d), \\ V_d \in \mathcal{S}_D^-(\alpha_g, V_g) \end{cases} \implies u_g = u_d = 0.$$

On obtient alors $p_g = p_d$, tandis que ρ_g , ρ_d et α_d sont arbitraires, ce qui implique la condition (iii).

Finalement le cas (3) correspond cette fois à la condition (v).

La dernière possibilité correspond à $V_g \in \mathcal{V}_G^+(\bar{V}_d)$ et $V_d \in \mathcal{O}_R((\alpha_g, V_g))$. Cette condition implique (vi) ou (vii) selon que $V_d \in \mathcal{C}_D^{1,-}(\alpha_g, V_g)$ ou que $V_d \in \mathcal{S}_D^-(\alpha_g, V_g)$, par définition de ces ensembles, ou la condition non triviale (viii). \square

Remarque 7.7.

La condition « symétrique » à la condition (ii), $V_g = \bar{V}_d$, $u_g = u_d > 0$, n'est possible que si $\alpha_g = \alpha_d$. En effet, si $\alpha_g \neq \alpha_d$, cette condition serait possible si et seulement si V_d appartenait à l'ensemble $\mathcal{S}_D^-(\alpha_g, V_g) \cup \mathcal{V}_D^-(\alpha_g, V_g)$, puisque la condition $V_d \in \mathcal{C}_D^{1,-}(\alpha_g, V_g)$ entraîne, par définition de ce dernier ensemble, $\alpha_d = \alpha_g$. Or

$$\mathcal{S}_D^-(\alpha_g, V_g) \cup \mathcal{V}_D^-(\alpha_g, V_g) \subseteq \{(\alpha, \rho, u, p) \in \mathbb{R}^4 : u \leq 0\}$$

et on en déduit que la condition $V_g = \bar{V}_d$, $u_g = u_d > 0$, n'est pas possible si $\alpha_g \neq \alpha_d$. Ce fait est naturel à cause de la dissymétrie entre les systèmes de gauche et de droite que l'on couple.

7.5 Le problème de Riemann couplé dans la classe des fonctions continues à l'interface

Le problème de Riemann couplé est le problème de Cauchy pour le système couplé (7.1), de donnée initiale $V(x, 0) = V_0(x)$, où

$$V_0(x) = \begin{cases} V_g = (\rho_g, u_g, p_g), & x < 0, \\ V_d = (\alpha_d, \rho_d, u_d, p_d), & x > 0, \end{cases} \quad (7.37)$$

avec $V_g \in \Omega_{V,L}$ et $V_d \in \Omega_{V,R}$.

L'objectif de cette section est l'étude de ce problème dans le cas particulier des solutions continues en $x = 0$. Comme pour un système général de lois de conservation, on s'attend que la structure de la donnée initiale se propage de façon auto-semblable et nous chercherons donc des solutions du problème (7.1), de donnée initiale (7.37), auto-semblables, dans la classe des fonctions composées d'états constants séparés d'ondes simples et qui soient, dans l'ensemble des $x < 0$, la restriction d'une solution d'un problème de Riemann pour le système d'Euler et, dans l'ensemble des $x > 0$, la restriction d'une solution d'un problème de Riemann pour le système HRM. Autrement dit, on cherche des solutions composées de L -états (c'est-à-dire, états admissibles pour le système d'Euler) séparés de L -ondes (c'est-à-dire, chocs, détente et discontinuités de contact admissibles pour le système d'Euler) de vitesse négative, et de R -états (états admissibles pour le système HRM) séparés de R -ondes (ondes admissibles pour le système HRM) de vitesse positive. Nous n'autorisons pas de discontinuités stationnaires en $x = 0$, puisque nous allons nous restreindre au cas particulier des solutions continues et à l'équilibre à l'interface, c'est-à-dire, aux solutions

$$V = V\left(\frac{x}{t}\right) = \begin{cases} (\rho, u, p)\left(\frac{x}{t}\right), & \frac{x}{t} < 0, \\ (\alpha, \rho, u, p)\left(\frac{x}{t}\right), & \frac{x}{t} > 0, \end{cases} \quad (7.38)$$

vérifiant

$$(\alpha, \rho, u, p)(0^+, t) = (\alpha_{eq}(\rho), \rho, u, p)(0^-, t), \quad \forall t > 0. \quad (7.39)$$

On remarque le fait, d'ailleurs évident, qu'une telle solution vérifie les conditions de couplage (7.3). En effet, puisque $(\rho, u, p)(0^-, t) = (\rho, u, p)(0^+, t)$, on a évidemment $(\rho, u, p)(0^-, t) \in \mathcal{O}_L((\rho, u, p)(0^+, t))$, pour tout $t > 0$, et, de la même manière, l'égalité (7.39) entraîne $(\alpha, \rho, u, p)(0^+, t) \in \mathcal{O}_R((\alpha_{eq}(\rho), \rho, u, p)(0^-, t))$, pour tout $t > 0$.

Remarque 7.8.

Puisque une telle solution vérifie $\rho(0^+, t) = \rho(0^-, t)$ et $\alpha(0^+, t) = \alpha_{eq}(\rho(0^-, t))$, $\forall t > 0$, on a $\alpha(0^+, t) = \alpha_{eq}(\rho(0^+, t))$. Il s'agit alors d'une solution dont ses valeurs sont à l'équilibre, à l'interface.

Une telle solution du problème de Riemann couplé que l'on vient de décrire ci-dessus, sera appelée de *solution continue à l'équilibre du problème de Riemann couplé*. Notre but est de construire des solutions de ce type. Pour ce faire, on considère les ensembles

$$\mathcal{V}_L(V_g) = \{Z_L(0^-; V_g, V) : V \in \Omega_{V,L}\}$$

et

$$\mathcal{V}_R(V_d) = \{Z_R(0^+; V, V_d) : V \in \Omega_{V,R}\}.$$

Le premier correspond à l'ensemble des traces en $\frac{x}{t} = 0^-$ des solutions du problème de Riemann pour le système d'Euler, dont la donnée initiale est égale à V_g , pour $x < 0$, le deuxième à l'ensemble des traces en $\frac{x}{t} = 0^+$ des solutions du problème de Riemann

pour le système HRM homogène, dont la donnée initiale est égale à V_d , pour $x > 0$. Il y a deux différences entre ces deux ensembles et leurs analogues $\mathcal{O}_L(V_d)$ et $\mathcal{O}_R(V_g)$. La première correspond au fait que V_d et V_g jouent ici des rôles contraires à ce qu'ils jouaient dans $\mathcal{O}_L(V_d)$ et $\mathcal{O}_R(V_g)$, ce qui ne change pas essentiellement la structure des deux paires d'ensembles. La deuxième au fait que les traces dans \mathcal{V}_L (respectivement dans \mathcal{V}_R) sont prises en $\frac{x}{t} = 0^-$ (respectivement en $\frac{x}{t} = 0^+$), tandis que dans \mathcal{O}_L (respectivement dans \mathcal{O}_R), les traces sont prises en 0^+ (respectivement en 0^-). Celle-ci est la différence essentielle entre ces deux paires d'ensembles, puisque elle correspond au fait que les ensembles \mathcal{O}_L et \mathcal{O}_R incluent des états correspondant à des discontinuités stationnaires (c'est-à-dire chocs ou discontinuités de contact de vitesse nulle), tandis que dans \mathcal{V}_L et dans \mathcal{V}_R ces états ne sont pas présents, comme l'on verra dans la suite.

Une première étape pour l'étude du problème de Riemann couplé est de décrire les ensembles $\mathcal{V}_L(V_g)$ et $\mathcal{V}_R(V_d)$.

7.5.1 Les ensembles $\mathcal{V}_L(V_g)$ et $\mathcal{V}_R(V_d)$

Une analyse analogue à celle faite pour les ensembles \mathcal{O}_L et \mathcal{O}_R , permet de conclure que l'ensemble $\mathcal{V}_L(V_g)$ est constitué de l'état V_g et des états que l'on peut relier à droite à V_g soit par une 1-onde de vitesse strictement négative, soit par une 1-onde suivie d'une discontinuité de contact de vitesses strictement négatives, soit par une 1-onde suivie d'une discontinuité de contact et d'une 3-onde de vitesses strictement négatives. De la même manière, l'ensemble $\mathcal{V}_R(V_d)$ est constitué de l'état V_d et des états que l'on peut relier à gauche à V_d soit par une 4-onde de vitesse strictement positive, soit par une discontinuité de contact suivie d'une 4-onde de vitesses strictement positives, soit par une 1-onde suivie d'une discontinuité de contact et d'une 4-onde, toutes de vitesses strictement positives. On introduit ainsi les ensembles suivants associés au système d'Euler :

$\hat{\mathcal{C}}_D^{1,-}(V_g)$ la partie de la courbe de 1-onde $\mathcal{C}_D^{1,L}(V_g)$ correspondant à des ondes de vitesse strictement négative, c'est-à-dire l'ensemble des états $V \in \Omega_{V,L}$ que l'on peut relier à V_g à droite par une 1-onde de vitesse strictement négative ;

$\hat{\mathcal{S}}_D^-(V_g)$ l'ensemble des états $V \in \Omega_{V,L}$ que l'on peut relier à V_g à droite par une 1-onde suivie d'une discontinuité de contact de vitesses strictement négatives ;

$\hat{\mathcal{V}}_D^-(V_g)$ l'ensemble des états $V \in \Omega_{V,L}$ que l'on peut relier à V_g à droite par une 1-onde suivie d'une discontinuité de contact et d'une 3-onde, toutes de vitesses strictement négatives.

On introduit aussi les ensembles analogues pour le système HRM :

$\hat{\mathcal{C}}_G^{4,+}(V_d)$ la partie de la courbe de 4-onde $\mathcal{C}_G^{4,R}(V_d)$ correspondant à des ondes de vitesse strictement positive, c'est-à-dire l'ensemble des états $V \in \Omega_{V,R}$ que l'on peut relier à V_d à gauche par une 4-onde de vitesse strictement positive ;

$\hat{\mathcal{S}}_G^+(V_d)$ l'ensemble des états $V \in \Omega_{V,R}$ que l'on peut relier à V_d à gauche par une discontinuité de contact suivie d'une 4-onde de vitesses strictement positives ;

$\hat{\mathcal{V}}_G^+(V_d)$ l'ensemble des états $V \in \Omega_{V,R}$ que l'on peut relier à gauche à V_d par une 1-onde suivie d'une discontinuité de contact et d'une 4-onde, toutes de vitesses strictement positives. On peut alors conclure pour les ensembles $\mathcal{V}_L(V_g)$ et $\mathcal{V}_R(V_d)$ une caractérisation analogue à celle des ensembles $\mathcal{O}_L(V_d)$ et $\mathcal{O}_R(V_g)$.

Théorème 7.4.

Soient $V_g \in \Omega_{V,L}$ et $V_d \in \Omega_{V,R}$. Alors

$$\mathcal{V}_L(V_g) = \{V_g\} \cup \hat{\mathcal{C}}_D^{1,-}(V_g) \cup \hat{\mathcal{S}}_D^-(V_g) \cup \hat{\mathcal{V}}_D^-(V_g)$$

et

$$\mathcal{V}_R(V_d) = \{V_d\} \cup \hat{\mathcal{C}}_G^{4,+}(V_d) \cup \hat{\mathcal{S}}_G^+(V_d) \cup \hat{\mathcal{V}}_G^+(V_d).$$

Maintenant, les ensembles $\hat{\mathcal{C}}_D^{1,-}(V_g)$, $\hat{\mathcal{S}}_D^-(V_g)$ et $\hat{\mathcal{V}}_D^-(V_g)$ peuvent se caractériser de la même manière que les ensembles $\mathcal{C}_D^{1,-}(V_g)$, $\mathcal{S}_D^-(V_g)$ et $\mathcal{V}_D^-(V_g)$. Il en est de même pour les ensembles $\hat{\mathcal{C}}_G^{4,+}(V_d)$, $\hat{\mathcal{S}}_G^+(V_d)$ et $\hat{\mathcal{V}}_G^+(V_d)$ et pour les ensembles $\mathcal{C}_G^{3,+}(V_d)$, $\mathcal{S}_G^+(V_d)$ et $\mathcal{V}_G^+(V_d)$. La différence entre les deux paires d'ensembles est que les « nouveaux » n'incluent pas d'états correspondant à des ondes stationnaires. Nous allons alors énoncer sans démonstration la proposition suivante.

Proposition 7.21.

Soit $V_g \in \Omega_{V,L}$. Alors :

1. L'ensemble $\hat{\mathcal{C}}_D^{1,-}(V_g)$ est décrit par

(a) si $u_g \leq \Phi_{L,g}(0) = -\int_0^{p_g} \frac{1}{(\rho c)(q,s_g)}$, tout l'ensemble $\mathcal{C}_D^{1,L}(V_g)$;

(b) si $\Phi_{L,g}(0) < u_g < c_g$, les états $V(p) \in \mathcal{C}_D^{1,L}(V_g)$ tels que $p > p_{\det}^1(V_g)$;

(c) si $u_g > c_g$, les états $V(p) \in \mathcal{C}_D^{1,L}(V_g)$ tels que $p > p_c^1(V_g)$;

2. L'ensemble $\hat{\mathcal{S}}_D^-(V_g)$ est l'ensemble

$$\{(\rho, u, p) : (u, p) \in \hat{\mathcal{P}}_D^{1,-}(V_g), u < 0, \rho > 0\};$$

3. L'ensemble $\hat{\mathcal{V}}_D^-(V_g)$ est donné par

$$\hat{\mathcal{V}}_D^-(V_g) = \{(\rho, u, p) \in \Omega_{V,L} : V \in \hat{\mathcal{C}}_D^{3,-}(V^*), V^* \in \hat{\mathcal{S}}_D^-(V_g)\}$$

et vérifie

$$\hat{\mathcal{V}}_D^-(V_g) \subseteq \{(\rho, u, p) \in \Omega_{V,L} : u < 0\}.$$

De la même manière, soit $V_d \in \Omega_{V,R}$. Alors :

1. L'ensemble $\hat{\mathcal{C}}_G^{4,+}(V_d)$ est décrit par

(a) si $u_d \leq -c_d$, les états $V(p) \in \mathcal{C}_G^{4,R}(V_d)$ tels que $p > \hat{p}_c^4(V_d)$;

(b) si $-c_d < u_d < -\Phi_{R,d}(0) = \int_0^{p_d} \frac{1}{(\rho c)(\alpha_d, q, s_d)} dq$, les états $V(p) \in \mathcal{C}_G^{4,R}(V_d)$ tels que $p > \hat{p}_{\det}^4(V_d)$;

(c) si $u_d \geq -\Phi_{R,d}(0)$, tout l'ensemble $\mathcal{C}_G^{4,R}(V_d)$;

2. L'ensemble $\hat{\mathcal{S}}_G^+(V_d)$ est l'ensemble

$$\{(\alpha, \rho, u, p) : (u, p) \in \hat{\mathcal{P}}_G^{4,+}(V_d), u > 0, \alpha \in [0, 1], \rho > 0\};$$

3. L'ensemble $\hat{V}_G^+(V_d)$ est donné par l'hypervolume correspondant, pour chaque $\alpha^* \in [0, 1]$, au volume de l'hyperplan $\alpha = \alpha^*$ situé au-dessus de la surface

$$\rho \geq \rho(u, p) = \begin{cases} \frac{\mu_*^2 p + p^*}{u^2 (1 - \mu_*^2)}, & u > u_d + \Phi_{R,d}(p), \\ \frac{\gamma_* p}{u^2}, & u < u_d + \Phi_{R,d}(p), \end{cases}$$

avec $\underline{p}^* = \underline{p}^*(u, p)$ défini par

$$\underline{u}^* = u_d + \Phi_{R,d}(\underline{p}^*), \quad u = \underline{u}^* \frac{\mu_*^2 p + p^*}{p + \mu_*^2 \underline{p}^*},$$

où (u, p) appartient au quart de plan

$$\begin{cases} u > 0, & \text{si } u_d \leq \frac{2}{\gamma_d - 1} c_d, \\ u \geq \mu_*^2 \left(u_d - \frac{2}{\gamma_d - 1} c_d \right), & \text{si } u_d > \frac{2}{\gamma_d - 1} c_d. \end{cases}$$

7.5.2 Le problème de Riemann couplé dans la classe des fonctions continues et à l'équilibre à l'interface

On s'intéresse désormais à l'étude du problème de Riemann couplé dans la classe de fonctions définie au paragraphe précédent. Nous commençons par montrer une propriété qui met en évidence le fait que l'ensemble des solutions continues du problème de Riemann couplé est en bijection avec l'ensemble « $\mathcal{V}_L(V_g) \cap \mathcal{V}_R(V_d)$ » au sens suivant :

Proposition 7.22.

Soient $V_g \in \Omega_{V,L}$, $V_d \in \Omega_{V,R}$ et $V(\frac{x}{t})$ une solution continue du problème de Riemann couplé de donnée initiale (7.37). Alors, si on pose $\bar{V} = V(0^-)$ et $\bar{\alpha} = \alpha_{eq}(\rho(0^-))$, on a $\bar{V} \in \mathcal{V}_L(V_g)$ et $(\bar{\alpha}, \bar{V}) \in \mathcal{V}_R(V_d)$.

Réciproquement, soient $\bar{V} = (\bar{\rho}, \bar{u}, \bar{p}) \in \Omega_{V,L}$ et $\bar{\alpha} = \alpha_{eq}(\bar{\rho})$ tels que $\bar{V} \in \mathcal{V}_L(V_g)$ et $(\bar{\alpha}, \bar{V}) \in \mathcal{V}_R(V_d)$. Alors on peut construire une solution $V(\frac{x}{t})$ continue à l'équilibre du problème de Riemann couplé telle que $V(0^-) = \bar{V}$ et $V(0^+) = (\bar{\alpha}, \bar{V})$, $\forall t > 0$.

Démonstration.

Soit $V(\frac{x}{t})$ une solution continue du problème de Riemann couplé. On a donc, par définition, que V est la restriction à l'ensemble des $x < 0$ d'un problème de Riemann pour le système d'Euler et la restriction à l'ensemble des $x > 0$ d'un problème de Riemann pour le système HRM. D'autre part, V vérifie la condition initiale (7.37). Ainsi, par définition des ensembles $\mathcal{V}_L(V_g)$ et $\mathcal{V}_R(V_d)$, on a $V(0^-) \in \mathcal{V}_L(V_g)$, c'est-à-dire $\bar{V} \in \mathcal{V}_L(V_g)$, et $V(0^+) \in \mathcal{V}_R(V_d)$. Comme la solution est continue en $x = 0$, on a $(\bar{\alpha}, \bar{V}) = (\alpha_{eq}(\rho), \rho, u, p)(0^-) = (\alpha, \rho, u, p)(0^+)$, de sorte que la condition $V(0^+) \in \mathcal{V}_R(V_d)$ équivaut à $(\bar{\alpha}, \bar{V}) \in \mathcal{V}_R(V_d)$.

Soient maintenant $\bar{V} \in \Omega_{V,L}$ et $\bar{\alpha} = \alpha_{eq}(\bar{\rho})$ tels que $\bar{V} \in \mathcal{V}_L(V_g)$ et $(\bar{\alpha}, \bar{V}) \in \mathcal{V}_R(V_d)$. Alors, par définition de ces ensembles et par construction des ensembles $\hat{\mathcal{C}}^{1,-}$, $\hat{\mathcal{C}}^{4,+}$, $\hat{\mathcal{S}}^\pm$ et $\hat{\mathcal{V}}^\pm$, on peut construire, d'un côté, une solution $V_L(\frac{x}{t})$ du problème de Riemann pour le système d'Euler, dont la donnée initiale est égale à V_g pour $x < 0$, constituée de L -ondes de vitesse strictement négative et telle que $V_L(0^-) = \bar{V}$,

et, d'autre côté, une solution $V_R(\frac{x}{t})$ du problème de Riemann pour le système HRM, dont la donnée initiale est égale à V_d pour $x > 0$, constituée de R -ondes de vitesse strictement positive et telle que $V_R(0^+) = (\bar{\alpha}, \bar{V})$. On considère alors la fonction

$$V\left(\frac{x}{t}\right) = \begin{cases} V_L\left(\frac{x}{t}\right), & \frac{x}{t} < 0, \\ V_R\left(\frac{x}{t}\right), & \frac{x}{t} > 0. \end{cases}$$

On a bien, par définition de V_L et de V_R , que V est une solution du problème de Riemann couplé. D'autre part, on a

$$(\rho, u, p)(0^-) = V(0^-) = V_L(0^-) = \bar{V}$$

et

$$(\alpha, \rho, u, p)(0^+) = V(0^+) = V_R(0^+) = (\bar{\alpha}, \bar{V}) = (\alpha_{eq}(\rho), \rho, u, p)(0^-).$$

On en déduit que V est une solution continue à l'équilibre du problème de Riemann couplé. \square

D'après la proposition précédente, on peut construire toutes les solutions continues à l'équilibre du problème de Riemann couplé en étudiant l'intersection de $\mathcal{V}_L(V_g)$ avec l'ensemble donné par la projection dans l'espace (ρ, u, p) de $\mathcal{V}_R(V_d)$. On commence par noter que

$$\hat{\mathcal{S}}_D^-(V_g) \subseteq \{(\rho, u, p) \in \Omega_{V,L} : u < 0\}, \quad \hat{\mathcal{V}}_D^-(V_g) \subseteq \{(\rho, u, p) \in \Omega_{V,L} : u < 0\},$$

tandis que

$$\hat{\mathcal{S}}_G^+(V_d) \subseteq \{(\alpha, \rho, u, p) \in \Omega_{V,R} : u > 0\}, \quad \hat{\mathcal{V}}_G^+(V_d) \subseteq \{(\alpha, \rho, u, p) \in \Omega_{V,R} : u > 0\}.$$

Ainsi, on a à considérer uniquement les cas correspondant à

$$\alpha_d = \alpha_{eq}(\rho_g), \quad V_g = (\rho_d, u_d, p_d), \quad (7.40)$$

$$(\alpha_{eq}(\rho_g), V_g) \in \hat{\mathcal{C}}_G^{4,+}(V_d) \cup \hat{\mathcal{S}}_G^+(V_d) \cup \hat{\mathcal{V}}_G^+(V_d), \quad (7.41)$$

$$\alpha_{eq}(\rho_d) = \alpha_d, \quad (\rho_d, u_d, p_d) \in \hat{\mathcal{C}}_D^{1,-}(V_g) \cup \hat{\mathcal{S}}_D^-(V_g) \cup \hat{\mathcal{V}}_D^-(V_g), \quad (7.42)$$

$$\bar{V} \in \hat{\mathcal{C}}_D^{1,-}(V_g), \quad (\alpha_{eq}(\bar{\rho}), \bar{V}) \in \hat{\mathcal{C}}_G^{4,+}(V_d) \cup \hat{\mathcal{S}}_G^+(V_d) \cup \hat{\mathcal{V}}_G^+(V_d), \quad (7.43)$$

$$(\alpha_{eq}(\bar{\rho}), \bar{V}) \in \hat{\mathcal{C}}_G^{4,+}(V_d), \quad \bar{V} \in \hat{\mathcal{S}}_D^-(V_g) \cup \hat{\mathcal{V}}_D^-(V_g). \quad (7.44)$$

Nous allons décrire la (ou les) solution(s) continue(s) à l'équilibre du problème de Riemann couplé correspondant aux 5 cas présentés ci-dessus.

Le cas (7.40) correspond à la solution triviale

$$V\left(\frac{x}{t}\right) = V_0(x) = \begin{cases} V_g = (\rho_g, u_g, p_g), & x < 0, \\ V_d = (\alpha_d, \rho_d, u_d, p_d), & x > 0. \end{cases}$$

Puisque l'on a exigé que la solution soit à l'équilibre à l'interface, cette solution a lieu si et seulement si la donnée initiale est à l'équilibre, c'est-à-dire $\alpha_d = \alpha_{eq}(\rho_g) = \alpha_{eq}(\rho_d)$.

Dans le cas (7.41), puisque $(\alpha_{eq}(\rho_g), V_g) \in \mathcal{V}_R(V_d)$, la solution continue à l'équilibre du problème de Riemann couplé est égale à V_g dans l'ensemble des $x < 0$ et coïncide avec celle du problème de Riemann pour le système HRM homogène de donnée initiale

$$V(x, 0) = \begin{cases} (\alpha_{eq}(\rho_g), V_g), & x < 0, \\ V_d, & x > 0, \end{cases}$$

dans l'ensemble des $x > 0$. Cette solution est alors constituée de l'état V_g et de R -états séparés par R -ondes de vitesse strictement positive (correspondant à une, deux ou trois ondes d'entre une 1-onde, une double discontinuité de contact et une 4-onde). Elle est égale à $(\alpha_{eq}(\rho_g), V_g)$ en 0^+ .

De manière analogue, dans le cas (7.42), puisque $(\rho_d, u_d, p_d) \in \mathcal{V}_L(V_g)$, la solution continue à l'équilibre du problème de Riemann couplé coïncide, dans l'ensemble des $x < 0$, avec celle du problème de Riemann pour le système d'Euler de donnée initiale

$$V(x, 0) = \begin{cases} V_g, & x < 0, \\ (\rho_d, u_d, p_d), & x > 0, \end{cases}$$

qui est égale à (ρ_d, u_d, p_d) en 0^- et à V_d , pour $x > 0$. Cette solution est alors constituée de L -états séparés par L -ondes de vitesse strictement négative (correspondant à une, deux ou trois ondes d'entre une 1-onde, une 2-discontinuité de contact et une 3-onde) et de l'état V_d . À nouveau cette solution a lieu seulement si la donnée initiale (7.37) est prise à l'équilibre.

Dans les cas (7.43) et (7.44), il y a à étudier les plusieurs possibilités existantes. On analyse les trois situations possibles correspondant au cas où la condition (7.43) est vérifiée. Si $\bar{V} \in \Omega_{V,L}$ est tel que (7.43) a lieu, on se trouve dans l'une des 3 situations suivantes :

1. $\bar{V} \in \hat{\mathcal{C}}_D^{1,-}(V_g)$ et $(\alpha_{eq}(\bar{\rho}), \bar{V}) \in \hat{\mathcal{C}}_G^{4,+}(V_d)$.

On remarque en premier lieu que si un état \bar{V} est dans ces conditions alors il est nécessairement unique, en vertu du fait que la courbe $\hat{\mathcal{C}}_D^{1,-}(V_g)$ (définie par $u = u_g - \Phi_{L,g}(p)$, $\rho = \varphi_{L,g}(p)$) et la projection de la courbe $\hat{\mathcal{C}}_G^{4,+}(V_d)$ dans l'espace (ρ, u, p) (définie par $u = u_d + \Phi_{R,d}(p)$, $\rho = \varphi_{R,d}(p)$) s'intersectent au maximum en un seul point $(\bar{\rho}, \bar{u}, \bar{p})$. De plus, par définition de $\hat{\mathcal{C}}_G^{4,+}(V_d)$, on a $\alpha_{eq}(\bar{\rho}) = \alpha_d$. Dans ce cas, la solution continue à l'équilibre du problème de Riemann couplé est constituée, dans l'ensemble des $x < 0$, des états V_g et \bar{V} , séparés par une 1- L -onde de vitesse strictement négative et, dans l'ensemble des $x > 0$, des états $(\alpha_{eq}(\bar{\rho}), \bar{V}) = (\alpha_d, \bar{V})$ et V_d , séparés d'une 4- R -onde de vitesse strictement positive.

2. $\bar{V} \in \hat{\mathcal{C}}_D^{1,-}(V_g)$ et $(\alpha_{eq}(\bar{\rho}), \bar{V}) \in \hat{\mathcal{S}}_G^+(V_d)$.

On remarque à nouveau qu'un état \bar{V} vérifiant ces conditions est unique, puisque (\bar{u}, \bar{p}) appartient alors aux deux courbes $\hat{\mathcal{P}}_D^{1,-}(V_g)$ et $\hat{\mathcal{P}}_G^{4,+}(V_d)$, qui s'intersectent en un seul point, et $\bar{\rho}$ est défini par $\bar{\rho} = \varphi_{L,g}(\bar{p})$ (mais cette fois-ci, on n'a pas forcément $\bar{\rho} = \varphi_{R,d}(\bar{p})$). Dans ce cas, la solution continue à l'équilibre du problème de Riemann couplé est constituée, dans l'ensemble des $x < 0$, des états V_g et \bar{V} séparés par une 1- L -onde de vitesse strictement négative et, dans l'ensemble des $x > 0$, des états $(\alpha_{eq}(\bar{\rho}), \bar{V})$ et V_d , qui sont séparés d'une discontinuité de contact suivie d'une 4- R -onde (qui peut être d'amplitude nulle) de vitesses strictement positives.

3. $\bar{V} \in \hat{\mathcal{C}}_D^{1,-}(V_g)$ et $(\alpha_{eq}(\bar{\rho}), \bar{V}) \in \hat{\mathcal{V}}_G^+(V_d)$.

Cette fois, un tel état n'est pas unique car l'ensemble correspondant à la projection de $\hat{\mathcal{V}}_G^+(V_d)$ dans l'espace (ρ, u, p) peut contenir une partie de la courbe $\hat{\mathcal{C}}_D^{1,-}(V_g)$. Pour chaque \bar{V} vérifiant ces conditions, la solution continue à l'équilibre du problème de Riemann couplé est constituée, dans l'ensemble des $x < 0$, des états V_g et \bar{V} séparés par une 1- L -onde de vitesse strictement négative et, dans l'ensemble des $x > 0$, des états $(\alpha_{eq}(\bar{\rho}), \bar{V})$ et V_d , séparés d'une 1- R -onde suivie d'une discontinuité de contact et d'une 4- R -onde (qui peuvent être d'amplitude nulle) de vitesses strictement positives. Du fait qu'un tel état \bar{V} n'est pas unique, il peut exister plusieurs solutions de ce type.

La cas (7.44) conduit à deux situations symétriques :

1. Si l'on suppose \bar{V} tel que $(\alpha_{eq}(\bar{\rho}), \bar{V}) \in \hat{\mathcal{C}}_G^{4,+}(V_d)$ et $\bar{V} \in \hat{\mathcal{S}}_D^-(V_g)$, alors la solution continue à l'équilibre du problème de Riemann couplé est constituée, dans l'ensemble des $x > 0$, des états (α_d, \bar{V}) et V_d , séparés d'une 4- R -onde de vitesse strictement positive et, dans l'ensemble des $x < 0$, des états V_g et \bar{V} séparés d'une 1- L -onde (éventuellement d'amplitude nulle) et d'une L -discontinuité de contact de vitesses strictement négatives. Un tel état \bar{V} est nécessairement unique, pour les mêmes raisons que ci-dessus, et est défini par $(\bar{u}, \bar{p}) \in \hat{\mathcal{P}}_D^{1,-}(V_g) \cap \hat{\mathcal{P}}_G^{4,+}(V_d)$, $\bar{\rho} = \varphi_{R,d}(\bar{p})$, avec $\alpha_{eq}(\bar{\rho}) = \alpha_d$, par définition de l'ensemble $\hat{\mathcal{C}}_G^{4,+}(V_d)$.

2. Si l'on suppose \bar{V} tel que $(\alpha_{eq}(\bar{\rho}), \bar{V}) \in \hat{\mathcal{C}}_G^{4,+}(V_d)$ et $\bar{V} \in \hat{\mathcal{V}}_D^-(V_g)$, alors la solution continue à l'équilibre du problème de Riemann couplé est constituée, dans l'ensemble des $x > 0$, des états (α_d, \bar{V}) et V_d , séparés d'une 4- R -onde de vitesse strictement positive et, dans l'ensemble des $x < 0$, des états V_g et \bar{V} séparés d'une 1- L -onde, d'une L -discontinuité de contact (éventuellement d'amplitudes nulles) et d'une 3- L -onde de vitesses strictement négatives. Comme dans la situation **3** ci-dessus, il peut exister plusieurs solutions de ce type, du fait qu'en général l'intersection de la courbe $\hat{\mathcal{C}}_G^{4,+}(V_d)$ avec l'hypervolume défini par le produit de l'ensemble $\hat{\mathcal{V}}_D^-(V_g)$ avec l'hyperplan $\alpha = \alpha^*$ correspond à un continuum de points.

Si $V\left(\frac{x}{t}\right)$ est une solution continue à l'équilibre du problème de Riemann couplé, on note alors $\bar{V} = V(0^-)$ et $(\bar{\alpha}, \bar{V}) = V(0^+) = (\alpha_{eq}(\rho(0^-)), V(0^-))$. On peut ainsi énoncer le théorème suivant :

Théorème 7.5.

Soient $V_g \in \Omega_{V,L}$ et $V_d \in \Omega_{V,R}$. Alors, le problème de Riemann couplé continu et à l'équilibre à l'interface admet une solution si et seulement si une des trois conditions (7.40)-(7.42) se vérifie ou il existe $\bar{V} \in \Omega_{V,L}$ tel que une des deux conditions (7.43), (7.44) se vérifie. Une telle solution est constituée au plus de 6 états constants séparés par une 1- L -onde et par une, deux ou trois R -ondes ou séparés par une, deux ou trois L -ondes et par une 4- R -onde.

De plus, si $V\left(\frac{x}{t}\right)$ est une solution continue à l'équilibre du problème de Riemann couplé, alors on se trouve dans l'une des situations suivantes :

1. $(\alpha_{eq}(\rho_g), V_g) = V_d$ et V est la solution triviale $V\left(\frac{x}{t}\right) = V_0(x)$, $\forall (x, t)$.
2. $(\alpha_{eq}(\rho_g), V_g) \in \hat{\mathcal{C}}_G^{4,+}(V_d) \cup \hat{\mathcal{S}}_G^+(V_d) \cup \hat{\mathcal{V}}_G^+(V_d)$. Alors $V(0^-) = V_g$, $V(0^+) = (\alpha_{eq}(\rho_g), V_g)$ et V est constituée d'une, deux ou trois R -ondes. Une telle solution est unique.

3. $(\rho_d, u_d, p_d) \in \hat{\mathcal{C}}_D^{1,-}(V_g) \cup \hat{\mathcal{S}}_D^-(V_g) \cup \hat{\mathcal{V}}_D^-(V_g)$ et $\alpha_d = \alpha_{eq}(\rho_d)$. Alors $V(0^-) = (\rho_d, u_d, p_d)$, $V(0^+) = V_d$ et V est constituée d'une, deux ou trois L -ondes. Une telle solution est unique.
4. $\bar{V} \in \hat{\mathcal{C}}_D^{1,-}(V_g)$ et $(\alpha_{eq}(\bar{\rho}), \bar{V}) \in \hat{\mathcal{C}}_G^{4,+}(V_d)$. Alors $V(0^-) = \bar{V}$, $V(0^+) = (\alpha_{eq}(\bar{\rho}), \bar{V}) = (\alpha_d, \bar{V})$ et V est constituée d'une $1-L$ -onde et d'une $4-R$ -onde. Une telle solution est unique.
5. $\bar{V} \in \hat{\mathcal{C}}_D^{1,-}(V_g)$ et $(\alpha_{eq}(\bar{\rho}), \bar{V}) \in \hat{\mathcal{S}}_G^+(V_d)$. Alors $V(0^-) = \bar{V}$, $V(0^+) = (\alpha_{eq}(\bar{\rho}), \bar{V})$ et V est constituée d'une $1-L$ -onde et de deux R -ondes. Une telle solution est unique.
6. $\bar{V} \in \hat{\mathcal{C}}_D^{1,-}(V_g)$ et $(\alpha_{eq}(\bar{\rho}), \bar{V}) \in \hat{\mathcal{V}}_G^+(V_d)$. Alors $V(0^-) = \bar{V}$, $V(0^+) = (\alpha_{eq}(\bar{\rho}), \bar{V})$ et V est constituée d'une $1-L$ -onde et de trois R -ondes. Il peut exister plusieurs solutions de ce type.
7. $(\alpha_{eq}(\bar{\rho}), \bar{V}) \in \hat{\mathcal{C}}_G^{4,+}(V_d)$ et $\bar{V} \in \hat{\mathcal{S}}_D^-(V_g)$. Alors $V(0^-) = \bar{V}$, $V(0^+) = (\alpha_{eq}(\bar{\rho}), \bar{V}) = (\alpha_d, \bar{V})$ et V est constituée de deux L -ondes et d'une $4-R$ -onde. Une telle solution est unique.
8. $(\alpha_{eq}(\bar{\rho}), \bar{V}) \in \hat{\mathcal{C}}_G^{4,+}(V_d)$ et $\bar{V} \in \hat{\mathcal{V}}_D^-(V_g)$. Alors $V(0^-) = \bar{V}$, $V(0^+) = (\alpha_{eq}(\bar{\rho}), \bar{V}) = (\alpha_d, \bar{V})$ et V est constituée de trois L -ondes et d'une $4-R$ -onde. Il peut exister plusieurs solutions de ce type.

7.5.3 Commentaires sur la condition d'équilibre

La condition d'équilibre à l'interface, $\alpha(0^+) = \alpha_{eq}(\rho(0^+))$, s'avère parfois restrictive. Dans ce paragraphe nous nous intéressons aux solutions continues du problème de Riemann couplé ne vérifiant pas nécessairement cette condition, c'est-à-dire, ne vérifiant que la condition de continuité en (ρ, u, p) ,

$$(\rho, u, p)(0^-) = (\rho, u, p)(0^+). \quad (7.45)$$

Dans ce cas, une fonction $V(\frac{x}{t})$ dans les conditions que l'on a considérées jusqu'à présent dans cette section (c'est-à-dire la restriction aux ensembles des $x < 0$ et des $x > 0$ de solutions du problème de Riemann pour le système d'Euler et pour le système HRM, respectivement) ne vérifie pas forcément les conditions de couplage. On doit alors imposer de plus que les contraintes de couplage (7.3) se vérifient. Puisque on a (7.45), les conditions (7.3) se réduisent à

$$(\alpha, \rho, u, p)(0^+) \in \mathcal{O}_R((\alpha_{eq}(\rho), \rho, u, p)(0^-)). \quad (7.46)$$

Si l'on raisonne comme au paragraphe précédent, on conclut que le problème de Riemann couplé continu à l'interface admet une solution $V(\frac{x}{t})$ si et seulement si il existe $\bar{\alpha} \in [0, 1]$ et $\bar{V} \in \Omega_{V,L}$ tels que

$$\bar{V} \in \mathcal{V}_L(V_g), \quad (\bar{\alpha}, \bar{V}) \in \mathcal{V}_R(V_d),$$

et vérifiant maintenant la condition

$$(\bar{\alpha}, \bar{V}) \in \mathcal{O}_R(\alpha_{eq}(\bar{\rho}), \bar{V}), \quad (7.47)$$

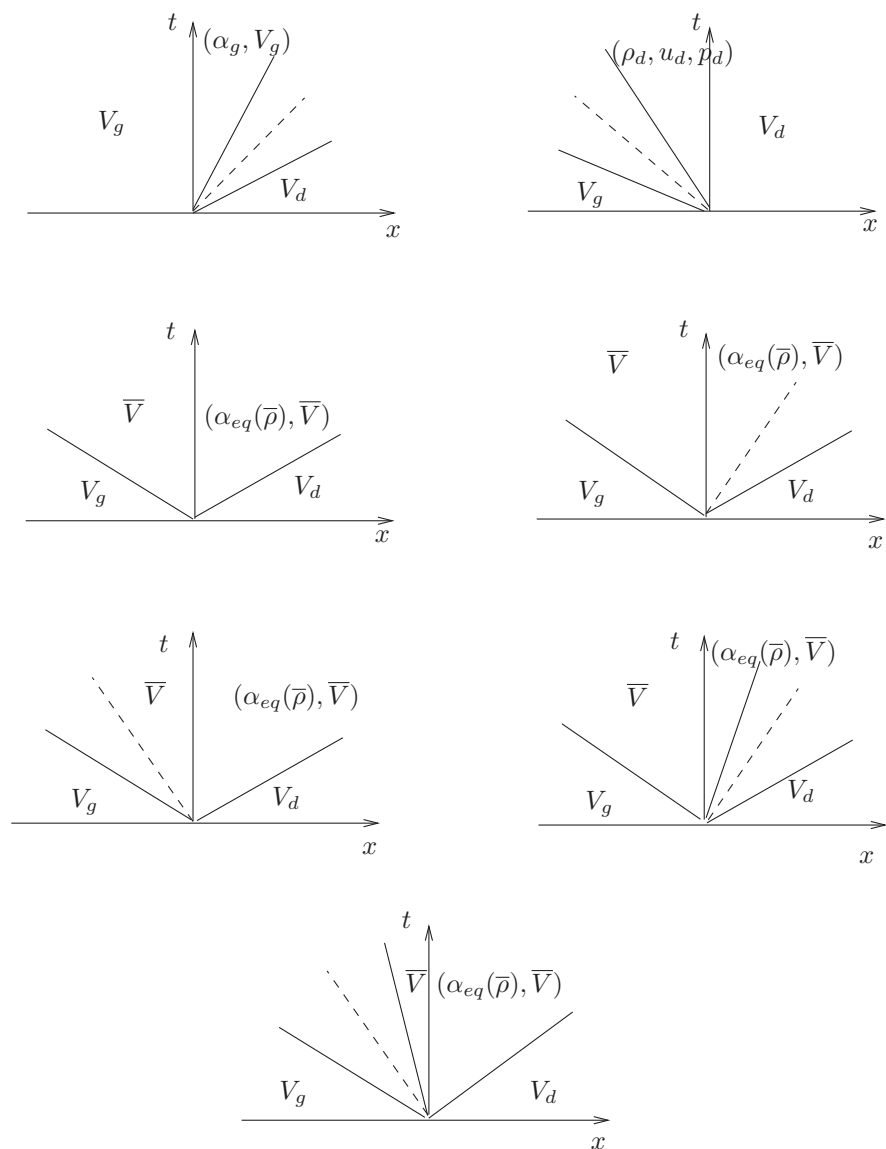


FIG. 7.6 – Solutions possibles du problème de Riemann couplé

avec $V(0^-) = \bar{V}$, $V(0^+) = (\alpha(0^+), (\rho, u, p)(0^+)) = (\bar{\alpha}, \bar{V})$.

Analysons la condition (7.47). L'ensemble $\mathcal{O}_R(\alpha_{eq}(\bar{\rho}), \bar{V})$ est l'ensemble des traces, en $\frac{x}{t} = 0^+$, des solutions du problème de Riemann pour le système HRM homogène dont la donnée initiale est égale à $(\alpha_{eq}(\bar{\rho}), \bar{V})$, pour $x < 0$. Comme l'on a vu au paragraphe 7.4.1, cet ensemble est constitué de l'état $(\alpha_{eq}(\bar{\rho}), \bar{V})$ et des états que l'on peut relier à droite à $(\alpha_{eq}(\bar{\rho}), \bar{V})$ par une 1-onde de vitesse négative ou par une 1-onde suivie d'une discontinuité de contact de vitesses négatives ou par une 1-onde suivie d'une discontinuité de contact et d'une 4-onde de vitesses négatives. La condition (7.47) n'est alors satisfaite qu'en deux cas :

- si $\bar{\alpha} = \alpha_{eq}(\bar{\rho})$. Ce cas correspond au cas analysé au paragraphe précédent.
 - si $(\bar{\alpha}, \bar{V})$ est la trace d'une solution non-triviale d'un problème de Riemann et, dans ce cas, les états $(\alpha_{eq}(\bar{\rho}), \bar{V})$ et $(\bar{\alpha}, \bar{V})$ ne peuvent être reliés que par une discontinuité de contact, qui doit être alors de vitesse négative, c'est-à-dire \bar{u} doit être négatif.
- Ainsi, si $\bar{\alpha} \neq \alpha_{eq}(\bar{\rho})$, la condition de couplage (7.47) est vérifiée si et seulement si $\bar{u} \leq 0$.

On conclut donc que le problème de Riemann couplé continu admet une solution si et seulement si il existe $\bar{V} = (\bar{\rho}, \bar{u}, \bar{p})$ tel que \bar{V} et $\bar{\alpha} = \alpha(0^+)$ vérifient

$$\begin{cases} \bar{V} \in \mathcal{V}_L(V_g), & (\bar{\alpha}, \bar{V}) \in \mathcal{V}_R(V_d) \\ (\bar{\alpha}, \bar{V}) \in \mathcal{O}_R(\alpha_{eq}(\bar{\rho}), \bar{V}) \end{cases} \iff \begin{cases} \bar{V} \in \mathcal{V}_L(V_g), & (\bar{\alpha}, \bar{V}) \in \mathcal{V}_R(V_d) \\ \bar{\alpha} = \alpha_{eq}(\bar{\rho}) \vee \bar{u} \leq 0. \end{cases}$$

On est ainsi amené à étudier les conditions

$$\begin{cases} \bar{V} \in \{V_g\} \cup \hat{\mathcal{C}}_D^{1,-}(V_g) \cup \hat{\mathcal{S}}_D^-(V_g) \cup \hat{\mathcal{V}}_D^-(V_g) \\ (\bar{\alpha}, \bar{V}) \in \{V_d\} \cup \hat{\mathcal{C}}_G^{4,+}(V_d) \cup \hat{\mathcal{S}}_G^+(V_d) \cup \hat{\mathcal{V}}_G^+(V_d) \end{cases} \quad (7.48)$$

avec la condition supplémentaire

$$\bar{\alpha} = \alpha_{eq}(\bar{\rho}) \vee \bar{u} \leq 0.$$

La condition (7.48), $\bar{\alpha} = \alpha_{eq}(\bar{\rho})$, correspond à l'étude faite au paragraphe précédent. La condition (7.48), $\bar{u} \leq 0$, impose que la valeur de α en 0^+ ne peut ne pas être à l'équilibre que si $u(0^-) = u(0^+) \leq 0$. Son étude conduit à des conditions similaires à (7.40)-(7.44) et on obtient ainsi, au plus des solutions données par le théorème 7.5, les solutions suivantes du problème de Riemann continu qui ne sont pas à l'équilibre à l'interface :

1. Si $V_g = (\rho_d, u_d, p_d)$ et $u_g = u_d \leq 0$, la solution triviale $V(\frac{x}{t}) = V_0(x)$, $\forall (x, t)$.
2. Si $u_g = u_d \leq 0$ et $(\bar{\alpha}, V_g) \in \hat{\mathcal{C}}_G^{4,+}(V_d) \cup \hat{\mathcal{S}}_G^+(V_d) \cup \hat{\mathcal{V}}_G^+(V_d)$, la solution $V = V_g$, pour $x < 0$, et telle que $V(0^+) = (\bar{\alpha}, V_g)$. V est constituée d'une, deux ou trois R -ondes en $x > 0$. Il peut exister plusieurs solutions de ce type correspondant au cas où une des R -ondes est une discontinuité de contact (dans ce cas $\bar{\alpha}$ est arbitraire).
3. Si $(\rho_d, u_d, p_d) \in \hat{\mathcal{C}}_D^{1,-}(V_g) \cup \hat{\mathcal{S}}_D^-(V_g) \cup \hat{\mathcal{V}}_D^-(V_g)$, $u_d \leq 0$ et $(\bar{\alpha}, \bar{V}) = V_d$, la solution V telle que $V = V_d$, pour $x > 0$, $V(0^-) = (\rho_d, u_d, p_d)$ et qui est constituée d'une, deux ou trois L -ondes. Une telle solution est unique.
4. Si $\bar{V} \in \hat{\mathcal{C}}_D^{1,-}(V_g)$ et $(\bar{\alpha}, \bar{V}) \in \hat{\mathcal{C}}_G^{4,+}(V_d)$, avec $\bar{u} \leq 0$, la solution V telle que $V(0^-) = \bar{V}$, $V(0^+) = (\bar{\alpha}, \bar{V}) = (\alpha_d, \bar{V})$ et qui est constituée d'une 1- L -onde et d'une 4- R -onde. Une telle solution est unique.

5. Si $\bar{V} \in \hat{\mathcal{C}}_D^{1,-}(V_g)$ et $(\bar{\alpha}, \bar{V}) \in \hat{\mathcal{S}}_G^+(V_d)$, avec $\bar{u} \leq 0$, la solution V telle que $V(0^-) = \bar{V}$, $V(0^+) = (\bar{\alpha}, \bar{V})$ et qui est constituée d'une 1- L -onde et de deux R -ondes. Il peut exister plusieurs solutions de ce type, puisque $\bar{\alpha}$ est arbitraire.
6. Si $\bar{V} \in \hat{\mathcal{C}}_D^{1,-}(V_g)$ et $(\bar{\alpha}, \bar{V}) \in \hat{\mathcal{V}}_G^+(V_d)$, avec $\bar{u} \leq 0$, la solution V telle que $V(0^-) = \bar{V}$, $V(0^+) = (\bar{\alpha}, \bar{V})$ et qui est constituée d'une 1- L -onde et de trois R -ondes. Il peut exister plusieurs solutions de ce type.
7. Si $(\bar{\alpha}, \bar{V}) \in \hat{\mathcal{C}}_G^{4,+}(V_d)$ et $\bar{V} \in \hat{\mathcal{S}}_D^-(V_g)$, avec $\bar{u} \leq 0$, la solution V telle que $V(0^-) = \bar{V}$, $V(0^+) = (\alpha_d, \bar{V})$ et qui est constituée de deux L -ondes et d'une 4- R -onde. Une telle solution est unique.
8. Si $(\bar{\alpha}, \bar{V}) \in \hat{\mathcal{C}}_G^{4,+}(V_d)$ et $\bar{V} \in \hat{\mathcal{V}}_D^-(V_g)$, avec $\bar{u} \leq 0$, la solution V telle que $V(0^-) = \bar{V}$, $V(0^+) = (\alpha_d, \bar{V})$ et qui est constituée de trois L -ondes et d'une 4- R -onde. Il peut exister plusieurs solutions de ce type.

En résumé, on peut obtenir des solutions V continues du problème de Riemann couplé avec une valeur de α qui n'est pas à l'équilibre à l'interface uniquement si V vérifie $u(0^-) = u(0^+) \leq 0$.

Démonstration des lemmes 7.6 et 7.7

A.1 Démonstration du lemme 7.6

Il faut étudier l'ensemble engendré par la courbe $\mathcal{C}_D^{4,-}(V^*)$ lorsque ρ^* parcourt l'intervalle $[\rho_{min}^*(\alpha^*, u^*, p^*), \frac{\gamma^* p^*}{u^{*2}}[= [\frac{(\gamma^*-1)p^*}{2u^{*2}}, \frac{\gamma^* p^*}{u^{*2}}[$ et lorsque ρ^* parcourt l'intervalle $[\frac{\gamma^* p^*}{u^{*2}}, +\infty[$. Pour ρ^* appartenant au premier intervalle ci-dessus, la partie admissible de la courbe $\mathcal{C}_D^{4,R}(V^*)$ est définie par les états $V(p)$, $p \leq p_c^4(V^*)$, autrement dit par une partie de la branche choc de la courbe, celle associée à des chocs de vitesse négative. Pour ρ^* appartenant au deuxième intervalle, la partie admissible de la courbe $\mathcal{C}_D^{4,R}(V^*)$ est définie par les états $V(p)$, $p \leq p_{det}^4(V^*)$, et est composée de toute la branche choc, correspondant aux valeurs de $p \leq p^*$, et d'une partie de la branche détente, correspondant aux valeurs de $p^* < p \leq p_{det}^4(V^*)$.

Nous allons démontrer le lemme en plusieurs étapes.

§ 1. *Projection dans le plan (u, p) de l'ensemble engendré par la partie choc admissible de la courbe $\mathcal{C}_D^{4,-}(V^*)$ lorsque ρ^* varie entre ρ_{min}^* et $\frac{\gamma^* p^*}{u^{*2}}$.*

Pour chaque V^* fixé, d'après la proposition 7.5 (en faisant V^* jouer le rôle de V_0), la partie choc admissible de la courbe $\mathcal{C}_D^{4,-}(V^*)$ est composée des états (α, ρ, u, p) tels que $\alpha = \alpha^*$ et

$$u = u^* - \sqrt{(p - p^*)(\tau^* - \mathfrak{h}_*(\alpha^*, p))}, \quad \tau = \mathfrak{h}_*(\alpha^*, p), \quad p \leq p_c^4(V^*),$$

où

$$\mathfrak{h}_*(\alpha^*, p) = \tau^* \frac{\mu_*^2 p + p^*}{p + p^* \mu_*^2}$$

et $p_c^4(V^*) = \frac{u^{*2}}{\tau^*}(1 - \mu_*^2) - p^* \mu_*^2$. Or en utilisant la relation (7.17) (à nouveau en remplaçant les états 0 par les états *), on obtient que la projection dans le plan (u, p) de cet ensemble est la courbe

$$u = u^* - (p^* - p) \frac{\sqrt{1 - \mu_*^2}}{\sqrt{\rho^*} \sqrt{p + \mu_*^2 p^*}}, \quad 0 < p \leq \frac{u^{*2}}{\tau^*}(1 - \mu_*^2) - p^* \mu_*^2. \quad (\text{A.1})$$

On remarque que à p fixé, (A.2) définit u comme une fonction croissante de ρ^* et que deux courbes différentes données par (A.2) pour des valeurs de ρ^* différentes, ne s'intersectent pas. Or, lorsque $\rho^* \rightarrow \rho_{min}^* = \frac{(\gamma^*-1)p^*}{2u^{*2}}$, on a

$$\begin{aligned} \frac{u^{*2}}{\tau^*}(1 - \mu_*^2) - p^* \mu_*^2 &\rightarrow \frac{(\gamma^* - 1)p^*}{2}(1 - \mu_*^2) - p^* \mu_*^2 \\ &= \frac{\gamma^* - 1}{2} \frac{2}{\gamma^* + 1} p^* - p^* \mu_*^2 \\ &= 0, \end{aligned}$$

de sorte que, puisque $u^* \leq 0$,

$$u \rightarrow u^* - p^* \frac{\sqrt{1 - \mu_*^2}}{\sqrt{\frac{\gamma^* - 1}{2} \frac{p^{*2} \mu_*^2}{u^{*2}}}} = u^* \left(1 + \sqrt{\frac{1 - \mu_*^2}{\mu_*^2}} \sqrt{\frac{2}{\gamma^* - 1}} \right) = \frac{u^*}{\mu_*^2}.$$

On conclut ainsi que, à la limite $\rho^* \rightarrow \rho_{min}^*$, la projection dans le plan (u, p) de la partie choc de la courbe $\mathcal{C}_D^{4,-}(V^*)$ se réduit au point $(u = \frac{u^*}{\mu_*^2}, p = 0)$. D'autre part, lorsque $\rho^* \rightarrow \frac{\gamma^* p^*}{u^{*2}}$, on a

$$\frac{u^{*2}}{\tau^*}(1 - \mu_*^2) - p^* \mu_*^2 \rightarrow (\gamma^*(1 - \mu_*^2) - \mu_*^2)p^* = \left(\frac{2\gamma^*}{\gamma^* + 1} - \frac{\gamma^* - 1}{\gamma^* + 1} \right) p^* = p^*$$

et la projection dans le plan (u, p) de la partie choc admissible de $\mathcal{C}_D^{4,-}(V^*)$ est caractérisée par

$$u = u^* \left(1 + (p^* - p) \sqrt{\frac{1 - \mu_*^2}{\gamma^* p^* (p + \mu_*^2 p^*)}} \right), \quad 0 < p \leq p^*. \quad (\text{A.2})$$

§ 2. *Projection dans le plan (u, p) de l'ensemble engendré par la partie choc admissible de la courbe $\mathcal{C}_D^{4,-}(V^*)$ lorsque ρ^* varie entre $\frac{\gamma^* p^*}{u^{*2}}$ et $+\infty$.*

On fait maintenant ρ^* varier entre $\frac{\gamma^* p^*}{u^{*2}}$ et $+\infty$, ce qui correspond à avoir $u^* \leq -c^*$. La branche de la projection dans le plan (u, p) de la courbe $\mathcal{C}_D^{4,-}(V^*)$ correspondant à la partie choc est encore donnée par (A.1), pour $0 < p < p^*$. D'une part, lorsque $\rho^* = \frac{\gamma^* p^*}{u^{*2}}$, on retrouve la courbe (A.2). D'une autre part, lorsque $\rho^* \rightarrow +\infty$, on trouve que $u \rightarrow u^*$ et (A.1) s'approche ainsi du segment

$$u = u^*, \quad 0 < p < p^*.$$

On peut conclure que, lorsque ρ^* varie entre ρ_{min}^* et $+\infty$, les courbes (A.1) verrouillent de façon croissante une région du plan comprise entre le segment précédent, à droite, et une courbe limite, à gauche, définie par les équations

$$\begin{cases} u = u^* - \frac{(p^* - p)\sqrt{1 - \mu_*^2}}{\sqrt{\rho^*} \sqrt{p + \mu_*^2 p^*}}, \\ p = \frac{u^{*2}}{\tau^*}(1 - \mu_*^2) - p^* \mu_*^2. \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Montrons que cette courbe est la courbe $u = u^* \rho^* \mathfrak{h}_*(\alpha^*; p) = \frac{u^*(p^* + \mu_*^2 p)}{p + \mu_*^2 p^*}$, $0 < p \leq p^*$, correspondant à la courbe des chocs de vitesse nulle. D'après (A.3), on obtient, d'un côté,

$$\rho^* = \frac{(p^* - p)^2(1 - \mu_*^2)}{(u - u^*)^2(p + \mu_*^2 p^*)},$$

et, d'un autre côté,

$$\rho^* = \frac{p + \mu_*^2 p^*}{u^*{}^2(1 - \mu_*^2)}.$$

En identifiant les deux expressions précédentes, on déduit

$$\frac{(p^* - p)^2(1 - \mu_*^2)^2}{(u - u^*)^2} = \frac{(p + \mu_*^2 p^*)^2}{u^*{}^2}$$

et, puisque $u < u^* \leq 0$ et $p \leq p^*$,

$$\frac{(p^* - p)(1 - \mu_*^2)}{u - u^*} = \frac{p + \mu_*^2 p^*}{u^*}.$$

On résout cette équation en u et on déduit finalement

$$u = \frac{u^*(p^* + \mu_*^2 p)}{p + \mu_*^2 p^*} = u^* \rho^* \mathfrak{h}_*(\alpha^*; p).$$

La projection dans le plan (u, p) de l'ensemble engendré par la partie choc de la courbe $C_D^{4,-}(V^*)$, lorsque ρ^* varie entre ρ_{min}^* et $+\infty$ correspond alors à la région du plan

$$\begin{cases} \frac{u^*(p^* + \mu_*^2 p)}{p + \mu_*^2 p^*} = u^* \rho^* \mathfrak{h}_*(\alpha^*; p) \leq u \leq u^*, \\ 0 < p \leq p^*. \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

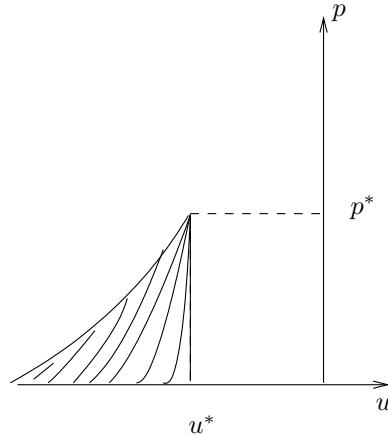


FIG. A.1 – Projection dans le plan (u, p) de l'ensemble engendré par la partie choc de la courbe $C_D^{4,-}(V^*)$, lorsque ρ^* varie entre ρ_{min}^* et $+\infty$.

§ 3. *Projection dans le plan (u, p) de l'ensemble engendré par la partie détente de la courbe $C_D^{4,-}(V^*)$ lorsque ρ^* varie entre $\frac{\gamma^* p^*}{u^{*2}}$ et $+\infty$.*

Nous décrivons ensuite la projection dans le plan (u, p) de l'ensemble engendré par la partie détente de la courbe $C_D^{4,-}(V^*)$ lorsque ρ^* varie entre $\frac{\gamma^* p^*}{u^{*2}}$ et $+\infty$. La branche détente admissible correspond à la courbe

$$\begin{aligned} u &= u^* + \int_{p^*}^p \frac{1}{(\rho c)(\alpha^*, q, s^*)} dq \\ &= u^* + \frac{2}{\gamma^* - 1} \left(c(\alpha^*, p, s^*) - c^* \right), \quad p^* < p \leq p_{det}^4(V^*), \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

où $p_{det}^4(V^*)$ est donné par l'intersection de cette courbe avec la courbe $u = -c(\alpha^*, p, s^*)$, c'est-à-dire la solution de

$$u^* + \frac{2}{\gamma^* - 1} \left(c(\alpha^*, p_{det}^4(V^*), s^*) - c^* \right) + c(\alpha^*, p_{det}^4(V^*), s^*) = 0.$$

On rappelle que la fonction $c(\alpha^*, p, s^*)$ est donnée par (cf. (7.15))

$$c(\alpha^*, p, s^*) = c^* \left(\frac{p}{p^*} \right)^{\frac{\gamma^* - 1}{2\gamma^*}}.$$

On en déduit (on omet V^* dans $p_{det}^4(V^*)$ et dans $c_{det}^4(V^*)$ pour simplifier la notation)

$$c_{det}^4 = c_{det}^4(\alpha^*, p_{det}^4, s^*) = -\frac{\gamma^* - 1}{\gamma^* + 1} u^* + \frac{2}{\gamma^* + 1} c^*,$$

c'est-à-dire

$$\left(\frac{p_{det}^4}{p^*} \right)^{\frac{\gamma^* - 1}{2\gamma^*}} = -\frac{\gamma^* - 1}{\gamma^* + 1} \frac{u^*}{c^*} + \frac{2}{\gamma^* + 1}, \quad (\text{A.6})$$

et

$$u_{det}^4 = -c_{det}^4 = \frac{\gamma^* - 1}{\gamma^* + 1} u^* - \frac{2}{\gamma^* + 1} c^*. \quad (\text{A.7})$$

On étudie ainsi l'ensemble engendré par la courbe (A.5), ou, de manière analogue, par la courbe

$$u = u^* + \frac{2}{\gamma^* - 1} c^* \left(\left(\frac{p}{p^*} \right)^{\frac{\gamma^* - 1}{2\gamma^*}} - 1 \right), \quad p^* \leq p \leq p_{det}^4, \quad (\text{A.8})$$

lorsque ρ^* varie entre $\frac{\gamma^* p^*}{u^{*2}}$ et $+\infty$. On remarque que la dépendance des courbes (A.8) en ρ^* a lieu à travers c^* . Ainsi, lorsque $\rho^* \rightarrow \frac{\gamma^* p^*}{u^{*2}}$, on a

$$c^* = \sqrt{\frac{\gamma^* p^*}{\rho^*}} \rightarrow -u^*$$

(rappelons que $u^* \leq 0$) et donc $c_{det}^4 \rightarrow c^*$, puis $p_{det}^4 \rightarrow p^*$. La courbe (A.8) se réduit ainsi au point $(u = u^*, p = p^*)$. Lorsque $\rho^* \rightarrow +\infty$, on a $c^* \rightarrow 0$ et donc $p_{det}^4 \rightarrow +\infty$ et la courbe (A.8) s'approche du segment de droite

$$u = u^*, \quad p^* < p < +\infty.$$

On remarque maintenant que, dans le plan (u, p) , les courbes (A.8) définissent p comme une fonction croissante de u et telle que $p''(u) < 0$, et croissent avec c^* (dans le sens des valeurs de u croissantes) et décroissent donc avec ρ^* . De plus, chaque branche de détente admissible, donnée par (A.8), correspondant à chaque valeur de $\rho^* \in [\frac{\gamma^* p^*}{u^{*2}}, +\infty[$, est une courbe qui a par origine le point (u^*, p^*) et qui se termine au point $(u_{det}^4, p_{det}^4) = (u_{det}^4, p_{det}^4)(V^*)$ (ce point varie donc avec ρ^*). L'ensemble engendré par la branche détente admissible de la courbe $\mathcal{C}_D^{4,-}(V^*)$, lorsque ρ^* varie, décrit alors la région du plan comprise entre le segment de droite $u = u^*$, $p^* \leq p < +\infty$ (la courbe limite correspondant à $\rho^* = +\infty$) et la courbe, que l'on peut paramétrer par ρ^* , décrite par les points $(u_{det}^4(V^*), p_{det}^4(V^*))$. Or, d'après (A.7), on a

$$(\gamma^* + 1)u_{det}^4 = (\gamma^* - 1)u^* - 2c^*,$$

soit

$$c^* = \frac{(\gamma^* - 1)u^* - (\gamma^* + 1)u_{det}^4}{2}.$$

En éliminant c^* de l'équation (A.6), on trouve

$$\left(\frac{p_{det}^4}{p^*}\right)^{\frac{\gamma^*-1}{2\gamma^*}} = -\frac{2u_{det}^4}{(\gamma^* - 1)u^* - (\gamma^* + 1)u_{det}^4}.$$

Dans le plan (u, p) , la courbe décrite par $(u_{det}^4(V^*), p_{det}^4(V^*))$ a alors par équation

$$p = p^* \left(-\frac{2u}{(\gamma^* - 1)u^* - (\gamma^* + 1)u} \right)^{\frac{2\gamma^*}{\gamma^*-1}} \iff u = u^* \frac{(\gamma^* - 1)p^{\frac{\gamma^*-1}{2\gamma^*}}}{(\gamma^* + 1)p^{\frac{\gamma^*-1}{2\gamma^*}} - 2p^* \frac{\gamma^*-1}{2\gamma^*}}.$$

On remarque que, lorsque $p \rightarrow p^*$, on a $u \rightarrow u^*$ et, lorsque $p \rightarrow +\infty$, on a $u \rightarrow \frac{\gamma^*-1}{\gamma^*+1}u^* = \mu_*^2 u^*$.

L'ensemble balayé par la branche détente admissible de la courbe $\mathcal{C}_D^{4,-}(V^*)$ est ainsi la région du plan comprise entre le segment de droite $u = u^*$, $p^* \leq p < +\infty$ et la courbe ci-dessus, c'est-à-dire, la région du plan

$$\begin{cases} u^* \leq u \leq u^* \frac{(\gamma^*-1)p^{\frac{\gamma^*-1}{2\gamma^*}}}{(\gamma^*+1)p^{\frac{\gamma^*-1}{2\gamma^*}} - 2p^* \frac{\gamma^*-1}{2\gamma^*}}, \\ p \geq p^*. \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

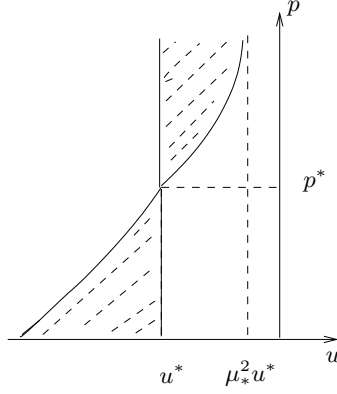


FIG. A.2 – Projection dans le plan (u, p) de l'ensemble engendré par la partie admissible de la courbe $\mathcal{C}_D^{4,-}(V^*)$, lorsque ρ^* varie entre ρ_{min}^* et $+\infty$ (pour $p < p^*$, ensemble engendré par la partie choc admissible, pour $p > p^*$, ensemble engendré par la partie détente admissible).

§ 4. Surface engendrée par la partie admissible de la courbe $\mathcal{C}_D^{4,-}(V^*)$, lorsque ρ^* varie entre $\rho_{min}^*(\alpha^*, u^*, p^*)$ et $+\infty$.

Il reste à caractériser la surface engendrée par la partie admissible de la courbe $\mathcal{C}_D^{4,-}(V^*)$, lorsque ρ^* varie entre ρ_{min}^* et $+\infty$. Dans le cas d'un choc reliant V^* et V , on a

$$\rho = \frac{1}{\mathfrak{h}_*(\alpha^*; p)} = \rho^* \frac{p + \mu_*^2 p^*}{\mu_*^2 p + p^*}.$$

Soit alors (u, p) , $p < p^*$, dans l'ensemble (A.4). Par construction, (u, p) appartient à une et une seule courbe de 4-choc (A.1), c'est-à-dire,

$$u = u^* - (p^* - p) \frac{\sqrt{1 - \mu_*^2}}{\sqrt{\rho^*} \sqrt{p + \mu_*^2 p^*}},$$

pour un certain $\rho^* \geq \rho_{min}^*$, donné par

$$(u - u^*)^2 = (p^* - p)^2 \frac{1 - \mu_*^2}{\rho^* (p + \mu_*^2 p^*)},$$

soit

$$\rho^* = \frac{1 - \mu_*^2}{(u - u^*)^2} \frac{(p^* - p)^2}{p + \mu_*^2 p^*}.$$

On a donc

$$\rho = \frac{1 - \mu_*^2}{(u - u^*)^2} \frac{(p^* - p)^2}{p^* + \mu_*^2 p}, \quad (\text{A.10})$$

et on conclut que l'équation de la surface engendrée par la partie choc admissible de la courbe $\mathcal{C}_D^{4,-}(V^*)$ est donnée par (A.10), avec (u, p) appartenant à la région du plan (A.4). Il reste à étudier la surface engendrée par la partie détente admissible de la

courbe $\mathcal{C}_D^{4,-}(V^*)$, lorsque ρ^* varie de $\frac{\gamma^* p^*}{u^{*2}}$ à $+\infty$. Dans le cas d'une détente reliant V^* et V , on a

$$\rho = \rho(\alpha^*, p, s^*) = \rho^* \left(\frac{p}{p^*} \right)^{\frac{1}{\gamma^*}}.$$

À nouveau, étant donné (u, p) , $p > p^*$, dans l'ensemble (A.9), il existe une et une seule courbe de 4-détente (A.5) à laquelle (u, p) appartient, donnée par

$$u = u^* + \frac{2}{\gamma^* - 1} \left(c(\alpha^*, p, s^*) - c^* \right),$$

pour un certain $\rho^* \geq \frac{\gamma^* p^*}{u^{*2}}$, ou, ce qui revient au même, pour un certain $c^* \in [0, -u^*]$, donné par

$$c^* = \frac{\gamma^* - 1}{2} \frac{u - u^*}{\left(\frac{p}{p^*} \right)^{\frac{\gamma^* - 1}{2\gamma^*}} - 1},$$

soit

$$c^* = \frac{\gamma^* - 1}{2} p^{*\frac{\gamma^* - 1}{2\gamma^*}} \frac{u - u^*}{p^{\frac{\gamma^* - 1}{2\gamma^*}} - p^{*\frac{\gamma^* - 1}{2\gamma^*}}.$$

On en déduit

$$\rho^* = \frac{\gamma^* p^*}{c^{*2}} = \frac{4\gamma^*}{(\gamma^* - 1)^2} p^{*\frac{1}{\gamma^*}} \frac{\left(p^{\frac{\gamma^* - 1}{2\gamma^*}} - p^{*\frac{\gamma^* - 1}{2\gamma^*}} \right)^2}{(u - u^*)^2}$$

et donc

$$\rho = \frac{4\gamma^*}{(\gamma^* - 1)^2} p^{\frac{1}{\gamma^*}} \frac{\left(p^{\frac{\gamma^* - 1}{2\gamma^*}} - p^{*\frac{\gamma^* - 1}{2\gamma^*}} \right)^2}{(u - u^*)^2}. \quad (\text{A.11})$$

L'équation de la surface engendrée par la partie détente admissible de la courbe $\mathcal{C}_D^{4,-}(V^*)$ est donc donnée par (A.11), où (u, p) appartient à la région du plan décrite par (A.9).

Ceci finit la preuve du lemme.

A.2 Démonstration du lemme 7.7

On commence par décrire l'ensemble engendré dans le plan (u, p) par le domaine $D(\alpha^*, u^*, p^*)$, lorsque (u^*, p^*) parcourt la courbe (7.32)

$$u^* = u_g - \Phi_{R,g}(p^*), \quad u^* \leq 0, \quad p^* \geq p_{min}^1(V_g).$$

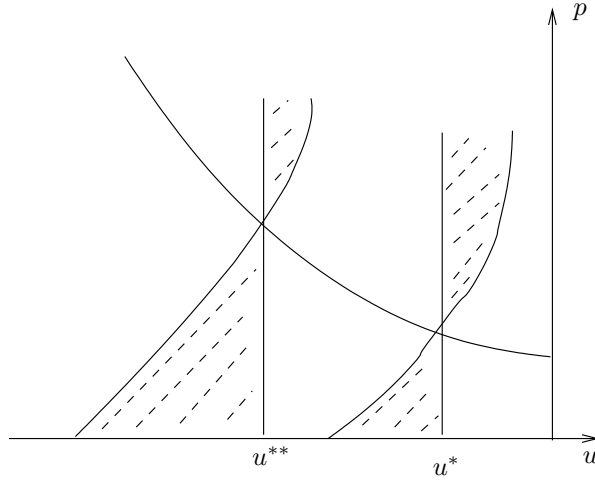
On considère alors la courbe (7.33) :

$$\bar{u}(p) = \begin{cases} u^* \frac{\mu_*^2 p + p^*}{p + \mu_*^2 p^*}, & 0 < p \leq p^*, \\ u^* \frac{(\gamma^* - 1)p^{\frac{\gamma^* - 1}{2\gamma^*}}}{(\gamma^* + 1)p^{\frac{\gamma^* - 1}{2\gamma^*}} - 2p^{*\frac{\gamma^* - 1}{2\gamma^*}}}, & p \geq p^*. \end{cases}$$

On a, d'une part,

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial p^*} = \begin{cases} u^* \frac{(1 - \mu_*^2)(1 + \mu_*^2)p}{(p + \mu_*^2 p^*)^2}, & 0 < p \leq p^*, \\ u^* \frac{(\gamma^* - 1)^2}{\gamma^*} \frac{p^{\frac{\gamma^* - 1}{2\gamma^*}}}{\left((\gamma^* + 1)p^{\frac{\gamma^* - 1}{2\gamma^*}} - 2p^{*\frac{\gamma^* - 1}{2\gamma^*}} \right)^2}, & p \geq p^*, \end{cases}$$

de sorte que $\frac{\partial \bar{u}}{\partial p^*} < 0$, $\forall p$. D'autre part, il est évident que, à p fixé, $\frac{\partial \bar{u}}{\partial u^*} > 0$. Ainsi, puisque u^* croît inversement à p^* le long de la courbe (7.32) (autrement dit, u^* décroît lorsque p^* croît et inversement), il est clair que le domaine $D(\alpha^*, u^*, p^*)$ se déplace de manière monotone vers les valeurs de u^* décroissantes, quand u^* décroît le long la courbe (7.32) (si $u^{**} < u^*$, alors le domaine $D(\alpha^*, u^{**}, p^{**})$ est « à gauche » de $D(\alpha^*, u^*, p^*)$.)



D'autre part, il est clair que, à p fixé, $\lim_{u^* \rightarrow -\infty} \bar{u}(p) = -\infty$. Ainsi, le volume cherché se projette dans le quart de plan ($u \leq 0, p > 0$) suivant la région du plan limitée à droite par la frontière de droite du domaine $D(\alpha^*, u^*, p^*)$ correspondant au point (u^*, p^*) de (7.32) associé à la valeur de $u^* \leq 0$ maximale. D'après la proposition 7.15, il y a à distinguer trois cas, selon que $u_g \leq -\int_0^{p_g} \frac{1}{\rho c}$, $-\int_0^{p_g} \frac{1}{\rho c} < u_g < c_g$ ou $u_g > c_g$.

Si $u_g \leq -\int_0^{p_g} \frac{1}{\rho c}$, c'est-à-dire, si $u_g \leq -\frac{2}{\gamma_g - 1} c_g$, alors toute la courbe de 1-onde (7.32) correspond à des ondes de vitesse négative. La valeur de u^* maximale est ainsi donnée en prenant $p^* = 0$ et correspond à la valeur $u_{max}^* = u_g + \int_0^{p_g} \frac{1}{\rho c} = u_g + \frac{2}{\gamma_g - 1} c_g$. On a bien $u_{max}^* \leq 0$. Si $(u^*, p^*) = (u_{max}^*, 0)$, (7.33) est la droite

$$u = \mu_*^2 u_{max}^*, \quad p > 0,$$

et le volume engendré par les surfaces (7.31) se projette alors suivant le quart de plan $u \leq \mu_*^2 u_{max}^*, p > 0$.

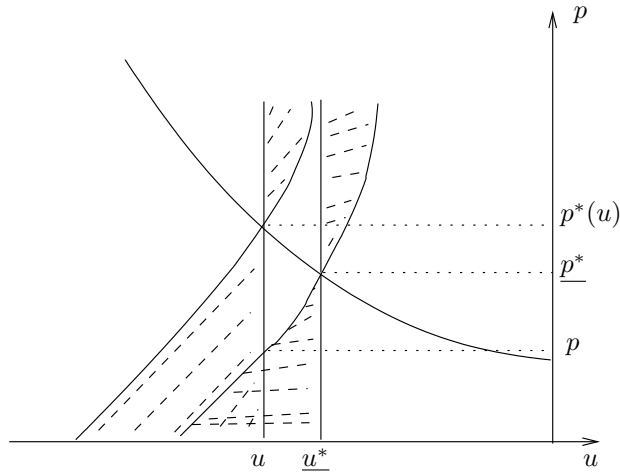
Si $-\int_0^{p_g} \frac{1}{\rho c} < u_g < c_g$, c'est-à-dire si $-\frac{2}{\gamma_g - 1} c_g < u_g < c_g$, alors la courbe de 1-onde $\mathcal{C}_D^{1,-}(V_g)$ correspond aux états $V(p)$ avec $p \geq \bar{p}_{det}^1(V_g)$. Sur les points de $\mathcal{P}_D^{1,-}(V_g)$, la valeur de u^* maximale correspond ainsi à la valeur $u_{det}^{*1}(V_g) := u^*(\bar{p}_{det}^1(V_g)) = c_g$, par définition de $\bar{p}_{det}^1(V_g)$. Comme $c_g > 0$, la valeur de u^* maximale admissible est alors obtenue en posant $u_{max}^* = 0$, ce qui correspond à une valeur $p_{max}^* = p^*(u_{max}^*) > 0$. Si $(u^*, p^*) = (u_{max}^*, p_{max}^*)$, (7.33) se réduit à la droite

$$u = 0, \quad p > 0,$$

et le volume engendré par les surfaces (7.31) se projette alors suivant le quart de plan $u \leq 0, p > 0$.

Il reste à analyser le cas $u_g > c_g$. La partie admissible de la courbe de 1-onde correspond maintenant aux états $V(p)$ avec $p \geq \bar{p}_c^1(V_g)$. La valeur de u^* maximale correspond ainsi à la valeur $u_c^1(V_g) := u^*(\bar{p}_c^1(V_g)) = u_g \rho_g h_g(\bar{p}_c^1(V_g))$, par définition de $\bar{p}_c^1(V_g)$. Puisque $u_g > c_g > 0$, cette valeur est positive et la valeur maximale admissible est à nouveau obtenue en posant $u_{max}^* = 0$. Encore une fois, le volume engendré par les surfaces (7.31) se projette suivant le quart de plan $u \leq 0, p > 0$.

On détermine maintenant le volume engendré par les surfaces (7.31) lorsque (u^*, p^*) parcourt la partie correspondant aux valeurs de $u^* \leq 0$ de la courbe de 1-onde (7.32). Pour ce faire, on considère (u, p) appartenant au quart de plan $u \geq u_{max}^*, p > 0$. Il y a lieu à distinguer si (u, p) est au dessus ou au dessous de la courbe de 1-onde (7.32). On commence par supposer que (u, p) est situé au dessous de celle-ci, c'est-à-dire, $u < u_g - \Phi_{R,g}(p)$. Le but est alors de décrire comment varient en fonction de (u^*, p^*) toutes les surfaces (7.31) auxquelles (ρ, u, p) puisse appartenir. On raisonne premièrement en terme des domaines $D(\alpha^*, u^*, p^*)$. Or les domaines qui incluent (u, p) sont, d'abord, celui correspondant à $u^* = u, p^* = p^*(u)$ donné par $u = u_g - \Phi_{R,g}(p^*)$, le domaine $D(\alpha^*, u, p^*(u))$. Puis celui correspondant à la valeur de \underline{u}^* maximale telle que le bord de gauche de ce domaine contienne le point (u, p) . Le point \underline{u}^* est tel que, pour $u^* > \underline{u}^*$, $(u, p) \notin D(\alpha^*, u^*, p^*)$ et est donné par l'intersection de la courbe (7.32) avec la courbe d'équation $u = u^* \rho^* \mathfrak{h}_*(\alpha^*; p)$ qui passe par (u, p) . Les autres domaines possibles correspondent à tous les domaines $D(\alpha^*, u^*, p^*)$, avec $u < u^* < \underline{u}^*$.



On remarque maintenant que la valeur que la surface $\bar{\rho}(\cdot, \cdot; \alpha^*, u^*, p^*)$ prend au point (u, p) est issue, pour le domaine $D(\alpha^*, u, p^*(u))$, de la valeur $\rho^* = +\infty$, et, pour le domaine $D(\alpha^*, \underline{u}^*, p^*)$, de la valeur $\rho^* = \frac{\gamma^* - 1}{2u^*} p^*$. Pour les domaines comprises entre les deux, d'une valeur ρ^* qui décroît avec u^* . Or

$$\bar{\rho}(u, p; \alpha^*, u^*, p^*) = \frac{1 - \mu_*^2}{(u - u^*)^2} \frac{(p^* - p)^2}{\mu_*^2 p + p^*}$$

est une fonction qui croît lorsque (u^*, p^*) se déplace dans le sens des u^* décroissants le long de la courbe $\mathcal{P}_D^{1,-}(V_g)$, pour $p \leq p^*$:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial u^*} = \frac{2(1 - \mu_*^2)(u - u^*)}{(u - u^*)^4} \frac{(p^* - p)^2}{\mu_*^2 p + p^*} < 0,$$

puisque $u < u^*$, et

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial p^*} = \frac{1 - \mu_*^2}{(u - u^*)^2} \frac{(p^* - p)(p^* + (2\mu_*^2 + 1)p)}{(\mu_*^2 p + p^*)^2} > 0.$$

puisque $p < p^*$. On obtient ainsi que, pour tout $u^* \in]u, \underline{u}^*, [$

$$\bar{\rho}(u, p; \alpha^*, \underline{u}^*, \underline{p}^*) < \bar{\rho}(u, p; \alpha^*, u^*, p^*) < \bar{\rho}(u, p; \alpha^*, u, p^*(u)).$$

Or, d'une part,

$$\bar{\rho}(u, p; \alpha^*, u, p^*(u)) = +\infty$$

et, d'autre part, comme $(\underline{u}^*, \underline{p}^*)$ vérifie

$$\underline{u}^* = u_g - \Phi_{R,g}(\underline{p}^*) \quad \text{et} \quad u = \underline{u}^* \frac{\mu_*^2 p + \underline{p}^*}{p + \mu_*^2 \underline{u}^*},$$

on a

$$\begin{aligned} u - \underline{u}^* &= \underline{u}^* \frac{\mu_*^2 p + \underline{p}^* - p - \mu_*^2 \underline{p}^*}{p + \mu_*^2 \underline{p}^*} \\ &= \underline{u}^* \frac{(p^* - p)(1 - \mu_*^2)}{p + \mu_*^2 \underline{p}^*} \\ &= u \frac{(p^* - p)(1 - \mu_*^2)}{\mu_*^2 p + \underline{p}^*}, \end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \bar{\rho}(u, p; \alpha^*, \underline{u}^*, \underline{p}^*) &= \frac{(1 - \mu_*^2)(p^* - p)^2 (\mu_*^2 p + \underline{p}^*)^2}{u^2 (p^* - p)^2 (1 - \mu_*^2)^2 (\mu_*^2 p + \underline{p}^*)} \\ &= \frac{\mu_*^2 p + \underline{p}^*}{u^2 (1 - \mu_*^2)}. \end{aligned}$$

On conclut donc que à α^* fixé, lorsque (u^*, p^*) parcourt la partie de la courbe de 1-onde $\mathcal{C}_R^{1,-}(V_g)$ correspondant aux valeurs de $u \leq 0$, les surfaces $\bar{\rho}(u, p; \alpha^*, u^*, p^*)$ balayent, pour (u, p) au dessous de la courbe (7.32), la région de l'espace située au dessus de la surface

$$\tilde{\rho}(\alpha^*; u, p) = \frac{\mu_*^2 p + \underline{p}^*}{u^2 (1 - \mu_*^2)},$$

où $\underline{p}^*(u, p)$ est donné par

$$\underline{u}^* = u_g + \Phi_R(\underline{p}^*), \quad u = \underline{u}^* \frac{\mu_*^2 p + \underline{p}^*}{p + \mu_*^2 \underline{p}^*}.$$

On suppose maintenant que (u, p) est situé au dessus de la courbe (7.32), c'est-à-dire $u > u_g - \Phi_{R,g}(p)$. Comme précédemment, les domaines auxquels (u, p) peut appartenir sont, d'abord $D(\alpha^*, u^*, p^*)$, avec $u^* = u$ et $p^* = p^*(u)$ solution de $u = u_g - \Phi_{R,g}(p^*)$, puis $D(\alpha^*, \underline{u}^*, \underline{p}^*)$, où \underline{u}^* est la valeur minimale de u^* telle que le bord de droite du

correspondant domaine contient le point (u, p) , puis tous les domaines $D(\alpha^*, u^*, p^*)$ tels que $\bar{u}^* < u^* < u$. On remarque que \bar{u}^* vérifie la propriété que, si $u^* < \bar{u}^*$, alors $(u, p) \notin D(\alpha^*, u^*, p^*)$ et $\bar{p}^* = \bar{p}^*(u, p)$ est donné par

$$\begin{cases} \bar{u}^* = u_g - \Phi_{R,g}(\bar{p}^*) \\ u = \bar{u}^* \frac{(\gamma^* - 1)p^{\frac{\gamma^* - 1}{2\gamma^*}}}{(\gamma^* + 1)p^{\frac{\gamma^* - 1}{2\gamma^*}} - 2p^* \frac{\gamma^* - 1}{2\gamma^*}}. \end{cases}$$

Or, d'une part

$$\bar{\rho}(u, p; \alpha^*, u, p^*(u)) = +\infty.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \bar{u}^* - u &= \bar{u}^* \frac{(\gamma^* + 1)p^{\frac{\gamma^* - 1}{2\gamma^*}} - 2p^* \frac{\gamma^* - 1}{2\gamma^*} - (\gamma^* - 1)p^{\frac{\gamma^* - 1}{2\gamma^*}}}{(\gamma^* + 1)p^{\frac{\gamma^* - 1}{2\gamma^*}} - 2p^* \frac{\gamma^* - 1}{2\gamma^*}} \\ &= 2\bar{u}^* \frac{p^{\frac{\gamma^* - 1}{2\gamma^*}} - p^* \frac{\gamma^* - 1}{2\gamma^*}}{(\gamma^* + 1)p^{\frac{\gamma^* - 1}{2\gamma^*}} - 2p^* \frac{\gamma^* - 1}{2\gamma^*}} \\ &= \frac{2u}{(\gamma^* - 1)p^{\frac{\gamma^* - 1}{2\gamma^*}}} \left(p^{\frac{\gamma^* - 1}{2\gamma^*}} - p^* \frac{\gamma^* - 1}{2\gamma^*} \right), \end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \bar{\rho}(u, p; \alpha^*, \bar{u}^*, \bar{p}^*) &= \frac{4\gamma^*}{(\gamma^* - 1)^2 p^{\frac{1}{\gamma^*}}} \frac{\left(p^{\frac{\gamma^* - 1}{2\gamma^*}} - p^* \frac{\gamma^* - 1}{2\gamma^*} \right)^2}{4u^2 \left(p^{\frac{\gamma^* - 1}{2\gamma^*}} - p^* \frac{\gamma^* - 1}{2\gamma^*} \right)^2} (\gamma^* - 1)^2 p^{\frac{\gamma^* - 1}{\gamma^*}} \\ &= \frac{\gamma^* p}{u^2}. \end{aligned}$$

Maintenant, puisque pour $p \geq p^*$ on a

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial u^*} = \frac{4\gamma^*}{(\gamma^* - 1)^2 p^{\frac{1}{\gamma^*}}} \frac{2(u - u^*) \left(p^{\frac{\gamma^* - 1}{2\gamma^*}} - p^* \frac{\gamma^* - 1}{2\gamma^*} \right)^2}{(u - u^*)^4} > 0$$

(vu que $u > u^*$) et

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial p^*} = \frac{4\gamma^*}{(\gamma^* - 1)^2 p^{\frac{1}{\gamma^*}}} \frac{-2p^{*-\frac{\gamma^*+1}{2\gamma^*}} \left(p^{\frac{\gamma^* - 1}{2\gamma^*}} - p^* \frac{\gamma^* - 1}{2\gamma^*} \right)}{(u - u^*)^2} < 0,$$

on conclut que, pour tout $u^* \in [\bar{u}^*, u]$,

$$\bar{\rho}(u, p; \alpha^*, \bar{u}^*, \bar{p}^*) \leq \bar{\rho}(u, p; \alpha^*, u^*, p^*) < \bar{\rho}(u, p; \alpha^*, u, p^*(u)).$$

On en déduit

$$\frac{\gamma^* p}{u^2} \leq \bar{\rho}(u, p; \alpha^*, u^*, p^*) < +\infty,$$

et donc, lorsque (u^*, p^*) parcourt la partie de la courbe de 1-onde $\mathcal{C}_R^{1,-}(V_g)$ correspondant aux valeurs de $u \leq 0$, les surfaces $\bar{\rho}(u, p; \alpha^*, u^*, p^*)$ balayent, pour (u, p) au-dessus de la courbe (7.32), la région de l'espace située au dessus de la surface

$$\tilde{\rho}(\alpha^*; u, p) = \frac{\gamma^* p}{u^2}.$$

Bibliographie

- [AK01] R. ABGRALL et S. KARNI, *Computations of compressible multifluids*, J. Comput. Phys., **169** (2001), pp. 594–623.
- [ACC+05a] A. AMBROSO, C. CHALONS, F. COQUEL, E. GODLEWSKI, J.-M. HÉRARD, F. LAGOUTIÈRE, P.-A. RAVIART et N. SEGUIN, *Coupling of multi-phase flow models*, Proceedings of the Eleventh International Meeting on Nuclear Thermal-Hydraulics (NURETH) (2005).
- [ACC+05b] A. AMBROSO, C. CHALONS, F. COQUEL, E. GODLEWSKI, F. LAGOUTIÈRE, P.-A. RAVIART et N. SEGUIN, *Homogeneous models with phase transition : coupling by finite volume methods*, Finite Volumes for Complex Applications IV, Hermes Science (2005), pp. 483–492.
- [ACC+c] A. AMBROSO, C. CHALONS, F. COQUEL, E. GODLEWSKI, F. LAGOUTIÈRE, P.-A. RAVIART et N. SEGUIN, *The coupling of homogeneous models for two phase flows*, en préparation.
- [ACC+05d] A. AMBROSO, C. CHALONS, F. COQUEL, E. GODLEWSKI et P.-A. RAVIART, *Couplage de deux systèmes de la dynamique des gaz*, Actes du 17ème Congrès Français de Mécanique (2005).
- [AM04] D. AREGBA-DRIOLLET et V. MILISIC, *Kinetic approximation of a boundary value problem for conservation laws*, Numer. Math., **97** (2004), pp. 595–633.
- [AN96] D. AREGBA-DRIOLLET et R. NATALINI, *Convergence of relaxation schemes for conservation laws*, Appl. Anal., **61** (1996), pp. 163–193.
- [BLN79] C. BARDOS, A. LE ROUX et J.-C. NÉDÉLEC, *First order quasilinear equations with boundary conditions*, Comm. Partial Differential Equations , **4**, no. 9 (1979), pp. 1017–1034.

- [BP02] C. BARDOS et O. PIRONNEAU, *A formalism for the differentiation of conservation laws*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, **335** (2002), pp. 839–845.
- [BJ98a] F. BOUCHUT et F. JAMES, *One-dimensional transport equations with discontinuous coefficients*, Nonlinear Anal., **32**, no. 7 (1998), pp. 891–933.
- [BJ98b] F. BOUCHUT et F. JAMES, *Differentiability with respect to the initial data for a scalar conservation law*, Proceedings of the Seventh International Conference on Hyperbolic Problems, Zürich, (1998), pp. 113–118.
- [Car04] F. CARO, *Modélisation et simulation numérique des transitions de phase liquide-vapeur*, Thèse de Doctorat de l'École Polytechnique (2004).
- [Cha99] A. CHALABI, *Convergence of relaxation schemes for hyperbolic conservation laws with stiff source terms*, Math. Comp., **68** (1999), pp. 955–970.
- [CRS] C. CHALONS, P.-A. RAVIART et N. SEGUIN, *The interface coupling of the gas dynamics equations*, en préparation.
- [CLL94] G. Q. CHEN, C. D. LEVERMORE et T. P. LIU, *Hyperbolic conservation laws with stiff relaxation terms and entropy*, Comm. Pure Appl. Math., **47** (1994), pp. 787–830.
- [CL93] G. Q. CHEN et T. P. LIU, *Zero relaxation and dissipation limits for hyperbolic conservation laws*, Comm. Pure Appl. Math., **46** (1993), pp. 755–781.
- [CR96] J.-F. COLLET et M. RASCLE, *Convergence of the relaxation approximation to a scalar nonlinear hyperbolic equation arising in chromatography*, Z. Angew. Math. Phys., **47** (1996), pp. 400–409.
- [DLM95] G. DALMASO, P.G. LEFLOCH et F. MURAT, *Definition and weak stability of nonconservative products*, J. Math. Pures Appl., **74** (1995), pp. 483–548.
- [DiP83] R. J. DIPERNA, *Convergence of approximate solutions to conservation laws*, Arch. Rat. Mech. Anal. **82** (1983), pp. 27–70.
- [DL88] F. DUBOIS et P.G. LEFLOCH, *Boundary conditions for nonlinear hyperbolic problems of conservation laws*, J. Differential Equations, **71** (1988), pp. 93–122.
- [EG92] L. C. EVANS et R. F. GARIEPY, *Measure theory and fine properties of functions*, CRC Press (1992).

- [GLR05] E. GODLEWSKI, K.-C. LETHANH et P.-A. RAVIART, *The numerical interface coupling of nonlinear hyperbolic systems of conservation laws : II- the case of systems*, M2AN Math. Model. Numer. Anal, **39** (2005), pp. 649–692.
- [GOR98] E. GODLEWSKI, M. OLAZABAL et P.-A. RAVIART, *On the linearization of hyperbolic systems of conservation laws. Application to stability*, Équations aux dérivées partielles et applications, articles dédiés à J.-L. Lions, Gauthier-Villars, Paris (1998), pp. 549–570.
- [GOR99] E. GODLEWSKI, M. OLAZABAL et P.-A. RAVIART, *On the linearization of systems of conservation laws for fluids at a material contact discontinuity*, J. Math. Pures Appl., **78** (1999), pp. 1013–1042.
- [GR91] E. GODLEWSKI et P.-A. RAVIART, *Hyperbolic Systems of Conservation Laws*, Ellipses, Paris (1991).
- [GR96] E. GODLEWSKI et P.-A. RAVIART, *Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws*, Springer, New York (1996).
- [GR00] E. GODLEWSKI et P.-A. RAVIART, *An introduction to the linearized stability of solutions of nonlinear hyperbolic systems of conservation laws*, Publications du Laboratoire d'Analyse Numérique (2000).
- [GR04] E. GODLEWSKI et P.-A. RAVIART, *The numerical interface coupling of nonlinear hyperbolic systems of conservation laws : I- the scalar case*, Numer. Math., **97** (2004), pp. 81–130.
- [GS04] E. GODLEWSKI et N. SEGUIN, *The Riemann problem for a simple model of phase transition*, Commun. Math. Sci., **4**, no. 1 (2006), pp. 227–247.
- [HH04] J. M. HERARD et O. HURISSE, *Coupling one and two-dimensional models through a thin interface*, EDF Internal report HI-81/04/07/A (2004).
- [Jao01] S. JAOUEN, *Étude mathématique et numérique de stabilité pour des modèles hydrodynamiques avec transition de phase*, Thèse de Doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie (2001).
- [JX95] S. JIN et Z. XIN, *The relaxation schemes for systems of conservation laws in arbitrary space dimensions*, Comm. Pure Appl. Math, **48** (1995), pp. 235–277.
- [Kru70] S. N. KRUSHKOV, *First order quasilinear equations in several independent variables*, Math. USSR-Sb., **10** (1970), pp. 217–243.

- [LS01] C. LATTANZIO et D. SERRE, *Convergence of a relaxation scheme for hyperbolic systems of conservation laws*, Numer. Math., **88** (2001), pp. 121–134.
- [Lax57] P. D. LAX, *Hyperbolic systems of conservation laws II*, Comm. Pure Appl. Math., **10** (1957), pp. 537–566.
- [LeV02] R. J. LEVEQUE, *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*, Cambridge University Press, Cambridge (2002).
- [Liu87] T. P. LIU, *Hyperbolic conservation laws with relaxation*, Comm. Math. Phys., **108** (1987), pp. 153–175.
- [Mil03] V. MILISIC, *Stability and convergence of discrete kinetic approximations to an initial-boundary value problem for conservation laws*, Proc. Amer. Math. Soc., **131** (2003), pp. 1727–1737.
- [Mur78] F. MURAT, *Compacité par compensation*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci., **5** (1978), pp. 489–507.
- [Nat96] R. NATALINI, *Convergence to equilibrium for the relaxation approximation of conservation laws*, Comm. Pure Appl. Math, **49** (1996), pp. 795–823.
- [NT01] R. NATALINI et . A. TERRACINA, *Convergence of a relaxation approximation to a boundary value problem for conservation laws*, Comm. Partial Differential Equations , **26** (2001), pp. 1235–1252.
- [Ser96] D. SERRE, *Systèmes de Lois de Conservation I et II*, Diderot, Paris (1996).
- [Ser00] D. SERRE, *Relaxation semi-linéaire et cinétique des systèmes de lois de conservation*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, **17**, n° 2 (2000), pp. 169–192.
- [Tar79] L. TARTAR, *Compensated compactness and applications to partial differential equations*, Heriot-Watt Sympos., IV, Pitman, New York (1979), pp. 136–212.
- [Vol67] A. VOLPERT, *The spaces BV and quasilinear equations*, Math. USSR-Sb., **2** (1967), pp. 225–267.
- [Whi74] G. B. WHITHAM, *Linear and Nonlinear Waves*, Wiley, New York (1974).